

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение

высшего образования

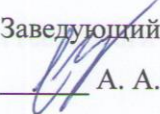
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий

Кафедра прикладной математики и компьютерной безопасности

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой


А. А. Кытманов

« 14 » июня 20 16 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

01.03.04 Прикладная математика


Вычислительная методика обработки сложных изображений на основе
шиарлет-преобразования

Руководитель


подпись, дата 14.06.2016

проф., д. т. н. К. В. Симонов

Выпускник


подпись, дата 14.06.2016

А. С. Кругляков

Красноярск 2016

РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Вычислительная методика обработки сложных изображений на основе шиарлет-преобразования» содержит 41 страниц текстового документа, 3 приложений, 15 использованных источников.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ШИАРЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, КОНТРАСТИРОВАНИЕ, СПЕКТРАЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ, ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЙ МОНИТОРИНГ, МЕДИЦИНСКАЯ ТОМОГРАФИЯ.

Объектом исследования являются снимки геоэкологического мониторинга и медицинской томографии.

Предметом исследования являются методы и алгоритмы шиарлет-преобразования.

Цель: Повышение точности решения задач спектральной декомпозиции и контрастирования пространственных данных и изображений на основе шиарлет-преобразования.

Задачи:

1) Изучить непрерывное и дискретное шиарлет-преобразования, включая описание существующего современного алгоритмического обеспечения.

2) В рамках решения задачи спектральной декомпозиции данных наблюдений обосновать алгоритм быстрого дискретного шиарлет-преобразования (FFST, Hauser) для выделения значимой частоты, соответствующей выделенной геометрической особенности изучаемого геообъекта.

3) В рамках задачи выделения контура и фильтрации на изображении разработать методику контрастирования результатов расчета для более четкого выделения обнаруженных закономерностей в исследуемых визуальных данных.

4) Выполнить экспериментальные исследования для решения задач геоэкологического мониторинга и медицинской томографии.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Модели шиарлет-преобразования данных наблюдений	7
1.1 Основные понятия и определения.....	7
1.2 Непрерывное шиарлет-преобразование	10
1.3 Дискретное шиарлет-преобразование.....	16
2 Алгоритм дискретного шиарлет преобразования.....	21
2.1 Реализации дискретного шиарлет-преобразования	21
2.2 Расчетная схема вычислительной методики.....	24
3 Вычислительная методика обработки изображений.....	28
Заключение	39
Список использованных источников	40
Приложение А Обработка изображений при помощи алгоритма FFST (выделение контура)	42
Приложение Б Обработка изображений при помощи алгоритма ShearLab (шумоподавление).....	50
Приложение В Обработка изображений при помощи алгоритма Shearlet_Toolbox (фильтрация).....	55

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Современное развитие вычислительных мощностей, телекоммуникационных сетей и увеличение объёмов запоминающих устройств обуславливает появление больших объёмов пространственных визуальных данных и необходимость их обработки.

Источниками таких данных могут выступать непрерывно поступающие данные с измерительных устройств, радиосигналы, информация с GPS-навигаторов многочисленных пользователей, метеорологические данные, данные дистанционного зондирования Земли, пространственные данные геодинамических и геоэкологических исследований, включая на нефть и газ, а также изображения медицинской томографии.

Комплекс подходов, инструментов и методов обработки данных большого объёма в информационных технологиях получил название «Big Data», и в настоящее время эта область активно развивается.

С точки зрения математики, эта задача сводится к разбиению исходных данных (сигнала) на блоки приемлемых размеров, обработке каждого блока в отдельности некоторым методом и анализу результатов обработки.

Объектом исследования в работе являются двумерные изображения. Отдельным вопросом анализа изображений является определение фрагментов изображения, имеющих анизотропные характеристики или разрывы (такие как края изображённых объектов или кривые линии на изображении), поскольку традиционные методы обработки изображений нечувствительны к подобного рода характеристикам.

В течение последних двадцати лет предложены различные методы обработки анизотропных объектов на изображении, такие как направленные вейвлеты, комплексные вейвлеты, контурлеты, кёрвлеты и т. п. В 2006 году предложен несколько иной подход к анализу анизотропных составляющих шиарлет [1, 3, 8, 9, 13].

В отличие от вейвлетов или кёрвлетов, шиарлеты строятся в классе

аффинных систем, а также обладают возможностью определения направленности благодаря дополнительно введённому параметру – параметру сдвига.

В свою очередь, шиарлеты обладают набором характеристик, выгодно выделяющих их на фоне остальных методов обработки изображений:

- 1) конечное число генерирующих функций;
- 2) оптимальное представление анизотропных характеристик анализируемых данных;
- 3) быстрая алгоритмическая реализация;
- 4) единый подход к разложению непрерывных и дискретных данных.

Цель: Повышение точности решения задач спектральной декомпозиции и контрастирования пространственных данных и изображений на основе шиарлет-преобразования.

Задачи:

1) Изучить непрерывное и дискретное шиарлет-преобразования, включая описание существующего современного алгоритмического обеспечения.

2) В рамках решения задачи спектральной декомпозиции данных наблюдений обосновать алгоритм быстрого дискретного шиарлет-преобразования (FFST, Hauser) для выделения значимой частоты, соответствующей выделенной геометрической особенности изучаемого геообъекта.

3) В рамках задачи выделения контура и фильтрации на изображении разработать методику контрастирования результатов расчета для более четкого выделения обнаруженных закономерностей в исследуемых визуальных данных.

4) Выполнить экспериментальные исследования для решения задач геоэкологического мониторинга и медицинской томографии (разделение точек и кривых на изображениях, выделение контура объектов на изображениях, фильтрация шума на визуальных данных).

Методы исследования: Использовались методы линейной алгебры,

теория обработки изображений, методы кратномасштабного анализа данных и нелинейной минимизации.

Фактические данные: цифровые изображения пространственных данных и изображений.

1 Модели шиарлет-преобразования данных наблюдений

1.1 Основные понятия и определения

Теоретической основой алгоритмического обеспечения для обработки данных геоэкологического мониторинга в созданной информационной системе является разработанные и обоснованные вычислительные схемы геометрического анализа пространственных данных и изображений с применением вычислительного инструмента – шиарлет-преобразования [9].

В большинстве многомерных задач важные особенности рассматриваемых данных наблюдений сосредоточены в многообразиях малых размерностей. Например, при обработке изображений, край – это одномерная кривая, на которой интенсивность изображения резко меняется.

В этой связи в последнее время вызывают большой интерес новые разработки, связанные с шиарлетами, где представлены эффективные инструменты для анализа внутренних геометрических черт изображения, использующие анизотропные и направленные оконные функции (рисунок 1.1) [3, 12].

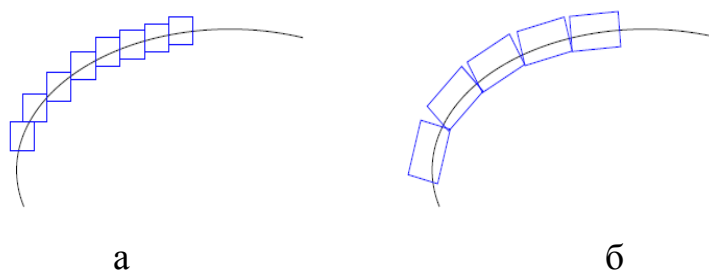


Рисунок 1.1 – Вейвлет- и шиарлет-представления

- а) – вейвлет-покрытие: изотропные элементы для описания линии;
- б) – шиарлет-покрытие: анизотропные элементы для описания линии

При таком подходе направленность изучается за счет применения целых

степеней матрицы сдвига, а эти операции сохраняют структуру целочисленной решетки, что имеет решающее значение для цифровой реализации.

По сути, это ключевая идея приводит к единому анализу, как в непрерывной, так и в дискретной области, обеспечивая при этом оптимально редкие приближения анизотропных характеристик.

Шиарлеты стали частью обширной исследовательской деятельности с 2006 г. (Kutyniok, Labate), с целью создания нового инструмента для анализа и обработки многомерных данных, которые ранее выходили за рамки традиционного Фурье- и вейвлет-анализа [2, 4, 5, 6, 8, 11].

Задача разделения изображения на морфологически разные составляющие (геометрический анализ) в последнее время вызывает большой интерес в научной среде в связи с её значимостью для актуальных приложений.

Вычислительные методики для эффективного и точного решения этой задачи могут быть применены к гораздо более широкому кругу областей науки и техники, в том числе к медицинской визуализации (томография), наблюдению и обработке речи, а также для обработки геоэкологической информации, полученной с помощью дистанционного зондирования Земли (анализ изображений на космоснимках).

Шиарлет-системы – это системы с параболическим масштабированием, сдвигом и оператором параллельного переноса, это те же вейвлет-системы, имеющие двоичное масштабирование и параллельный перенос, также включающие в себя характеристику направленности, имеющие дополнительную сдвиговую операцию (анизотропное масштабирование).

Сдвигающая операция, фактически, дает более удобный подход для анализа направлений, обеспечивая тем самым единую обработку непрерывных и цифровых областей, в отличие от кервлетов, которые базируются на вращении в непрерывной области.

Возникает вопрос – могут ли вейвлеты и шиарлеты быть применимы для разделения точечных и криволинейных особенностей. Теоретические результаты, базирующиеся на применении вейвлетов и кервлетов, показывают,

что они справедливы и для комбинированного набора вейвлетов и шиарлетов.

В указанном исследовании [15] представлен подход к разделению точечных и криволинейных структур, применяющий комбинированный набор вейвлетов и шиарлетов. Численные результаты свидетельствуют также, что полученные ранее результаты верны, т.е. этот подход лучше алгоритмов разделения, использующих вейвлеты и кервлеты, в частности, разработанный авторами статьи алгоритм шиарлет-преобразования быстрее и обеспечивает более точное разделение, если, например, кривизна криволинейной части велика.

В качестве примера показано разделение изображения на точки и кривые для двух областей (рисунок 1.2). На рисунках 1.2 (а) – 1.2 (в) показаны извлеченные изображения, содержащие шипы и дендриты, соответственно. На рисунках 1.2 (г) – 1.2 (е) показаны извлеченные изображения, содержащие звезды и галактики, соответственно.

Как показано на рисунке 1.2, представленный метод разделения изображения с использованием вейвлет- и шиарлет-преобразования эффективно решает указанные задачи и может быть использован для решения актуальных задач обработки визуальных данных геоэкологического мониторинга.

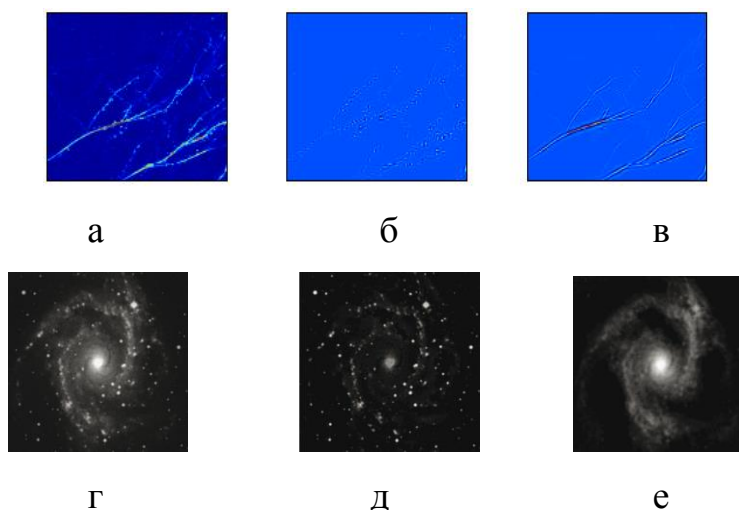


Рисунок 1.2 – Разделение изображения на точки и кривые

- а) – изображение нейрона; б) – извлеченные шипы; в) – извлеченные дендриты;
г) – изображение галактики NGC 2997; д) – извлеченные звезды;
е) – извлеченные галактики

Задача шиарлет-преобразования позволяет работать с криволинейными сингулярностями, учитывать анизотропные свойства исследуемой среды.

Следовательно, для решения новых задач геоэкологического мониторинга необходимо модифицировать метод геометрического анализа визуальных данных за счет обеспечения возможности выбора эффективных алгоритмов шиарлет-преобразования, что позволило бы повысить точность выделения линейных структур, визуальное качество изображений изучаемых объектов и их контуров.

1.2 Непрерывное шиарлет-преобразование

Для определения фрагментов изображения, имеющих направленность, введём по аналогии с вейвлетами три параметра: смещение t , масштабирование a и сдвиг s . В таком случае, для построения непрерывной системы шиарлетов необходима комбинация соответствующих операторов.

Оператор смещения T_t вводится обычным образом:

$$T_t f(x) = f(x - t) \quad (1)$$

Наиболее естественным выбором оператора масштабирования выглядит семейство D_{A_a} , $a > 0$, заданное матрицами вида $A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где параметр $\alpha \in (0, 1)$ обуславливает «степень анизотропии». Как правило, параметр α полагают равным $\frac{1}{2}$, поскольку такой выбор упрощает переход к дискретному шиарлет-преобразованию. В таком случае матрица A_a становится матрицей «параболического масштабирования».

Семейство ортогональных операторов сдвига D_{S_s} , $s \in \mathbb{R}$, образованных матрицами $S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 1. Для $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ непрерывной системой шиарлетов $\mathcal{SH}(\psi)$ называется множество:

$$\mathcal{SH}(\psi) = \left\{ \psi_{a,s,t}(x) = T_t D_{S_s} D_{A_a} \psi(x) = a^{-\frac{3}{4}} \psi(A_a^{-1} S_s^{-1}(x - t)) : a > 0, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (2)$$

Соответствующим непрерывным шиарлет-преобразованием некоторого $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ называется отображение

$$L^2(\mathbb{R}^2) \ni f \rightarrow \mathcal{SH}_\psi f(a, s, t) = \langle f, \psi_{a,s,t} \rangle, \quad (a, s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

Таким образом, непрерывное шиарлет-преобразование отображает функцию f на семейство функций $\psi_{a,s,t}$ с масштабирующим коэффициентом a , ориентации s и смещения t .

Анизотропное растяжение a определяет «масштаб» шиарлета, действуя на него различными множителями вдоль каждой оси, что обеспечивает вытянутость носителя шиарлета в области частот.

Матрица сдвига S_s не является расширяющей и определяет ориентацию шиарлета, используя параметр s для определения направленности входных данных. Параметр t позволяет указать позицию, в которой может быть обнаружен анизотропный участок изображения.

Преобразование Фурье элемента системы шиарлетов:

$$\hat{\psi}_{a,s,t}(\omega) = a^{\frac{3}{4}} e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \hat{\psi}(A_a^T S_s^T \omega) = a^{\frac{3}{4}} e^{-2\pi i \langle t, \omega \rangle} \hat{\psi}(a\omega_1, \sqrt{a}(\omega_2 + s\omega_1)) \quad (4)$$

Говорят, что шиарлет отвечает условию допустимости, если для $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ выполняется условие:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(v_1, v_2)|}{v_1^2} dv_1 dv_2 < \infty \quad (5)$$

Определение 2. Функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, называется классическим шиарлетом, если она удовлетворяет условию допустимости.

Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ определена следующим образом:

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \quad (6)$$

где $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ — дискретный вейвлет, для которого выполняются условия:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_1(2^{-j} \xi)|^2 = 1, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (7)$$

$\psi_1 \in C^\infty$ и $\text{supp}(\hat{\psi}_1) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right]$, а $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ — функция

рельефа, для которой выполняются условия:

$$\sum_{k=-1}^1 |\hat{\psi}_2(\xi + k)|^2, \xi \in [-1, 1] \quad (8)$$

$\psi_2 \in C^\infty$ и $\text{supp}(\hat{\psi}_2) \subseteq [-1, 1]$. Такая ψ называется классическим шиарлетом.

Как показано на рисунке 1.3, носитель каждого элемента классической системы шиарлетов $\psi_{a,s,t}$ в области частот представляет собой пару трапеций, симметричных относительно начала координат, ориентированных вдоль линии с уклоном s . Отметим, что носитель $\hat{\psi}_1$ удалён от начала координат, а носитель $\hat{\psi}_2$ расположен неподалёку от точки $(0, 0)$.

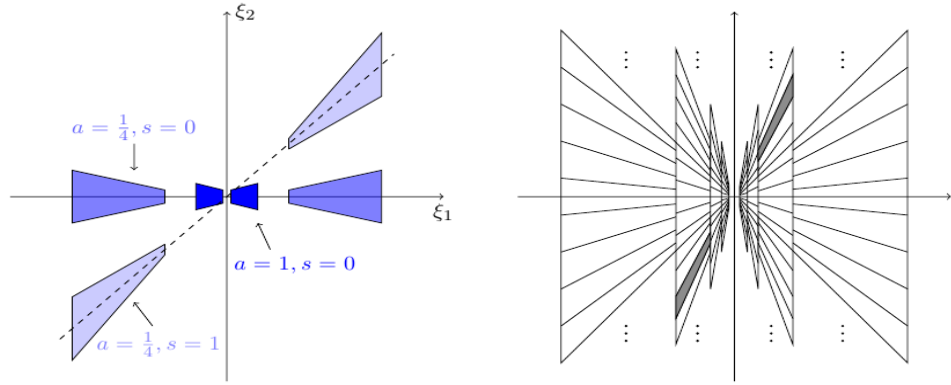


Рисунок 1.3 – Классический шиарлет. Носители в области преобразования Фурье некоторых элементов системы шиарлет при различных параметрах a и s .

Таким образом, классический шиарлет ψ – это вейвлетообразная вдоль одной оси и похожая на функцию рельефа вдоль другой оси функция. Одно из возможных сочетаний функций ψ_1 и ψ_2 , удовлетворяющих условиям классического шиарлета, выглядит следующим образом: ψ_1 – вейвлет Мейера, ψ_2 – сплайн.

Чтобы показать направленность анализирующих шиарлетов $\psi_{a,s,t}$, выберем ψ_1 и ψ_2 следующим образом. Зададим последовательность $b_n, n > 0$ основных сплайнов, заданных рекурсивно: $b_1 = \chi_{[0,1)}, b_n = b_{n-1} * \chi_{[0,1)}$ для $n > 1$. Затем определим функции ψ_1 и ψ_2 как:

$$\hat{\psi}_1(\omega) = b_2 \left(\frac{4}{3} \left(-\omega - \frac{1}{2} \right) \right) + b_2 \left(\frac{4}{3} \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (9)$$

$$\hat{\psi}_2(\omega) = b_8(4(\omega + 1)) \quad (10)$$

Тогда шиарлет $\psi(\xi)$, построенный по формуле

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2 \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right) \quad (11)$$

выглядит следующим образом в области времени и области частот (рисунок 1.3). Как видно, в области времени график вытянут вдоль оси Oy , а в области частот — в перпендикулярном направлении, вдоль оси Ox .

Графики шиарлета $\psi(\xi)$ со значением параметра сдвига s , равным $-\frac{1}{2}$, изображены на рисунке 1.4. График $\psi_{0,3,-\frac{1}{2};0}$ представляет собой сдвинутый график $\psi_{0,3;0;0}$, при этом вытянутость образа функции в области частот вновь перпендикулярна вытянутости в области времени.

Предположим теперь, что функция f имеет сингулярность в начале координат, направленную вдоль оси Oy . В качестве простого примера рассмотрим сингулярность линейного вида: $f = \delta(x_2 - px_1)$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда её преобразование Фурье представимо в виде $\hat{f} = \delta \left(\xi_2 + \frac{1}{p} \xi_1 \right)$. Отметим, что $\xi_2 = -\frac{1}{p} \xi_1$ представляет собой прямую, перпендикулярную прямой $x_2 = px_1$, вдоль которой вытянута функция f .

Анализирующие функции системы шиарлетов чаще всего накладываются на \hat{f} в том случае, когда шиарлет $\hat{\psi}_{a,s,t}$ вытянут вдоль прямой $\xi_2 = -\frac{1}{p} \xi_1$, то есть, когда $s = -\frac{1}{p}$.

Таким образом, возрастут коэффициенты $\langle f, \psi_{a,s,t} \rangle$ при значениях параметра s , соответствующих наклону прямой в направлении, перпендикулярном ориентации присутствующей сингулярности.

Параметр шиарлета t , наследуемый от материнского вейвлета при построении, играет ту же роль, что и в вейвлет-анализе, а именно определяет положение анализируемого анизотропного участка исследуемой функции.

Следует отметить, что если функция f имеет в области частот носитель на

оси ординат, она может быть отображена в области шварц-преобразования только когда $s \rightarrow \infty$. Этот факт накладывает некоторые ограничения в некоторых приложениях.

В таком случае из области частот вырезают область низких частот $\mathcal{R} = \{(\xi_1, \xi_2): |\xi_1|, |\xi_2| \leq 1\}$, а оставшееся пространство разбивают на несколько участков-конусов, как показано на рисунке 1.5.

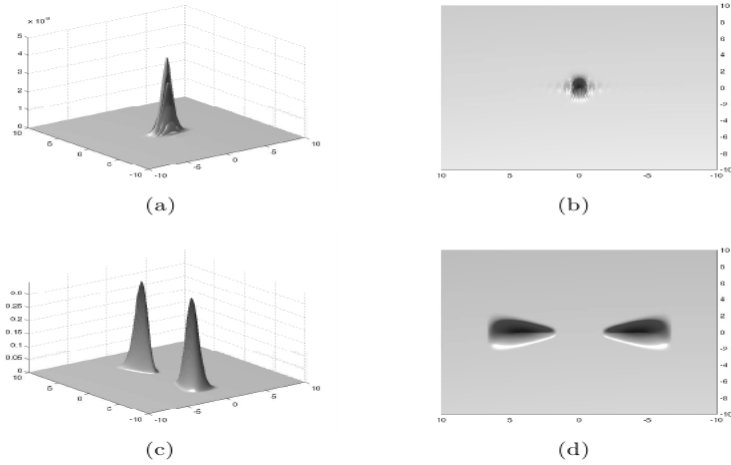


Рисунок 1.4 – Графики шварцета $\psi_{0,3;0;0}$ в области времени ((a), (b)) и в области частот ((c), (d))

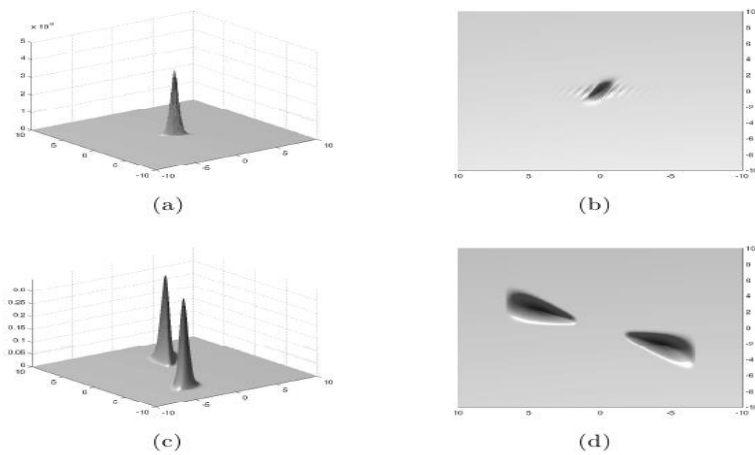


Рисунок 1.5 – Графики шварцета $\psi_{0,3;-\frac{1}{2};0}$ в области времени ((a), (b)) и в области частот ((c), (d))

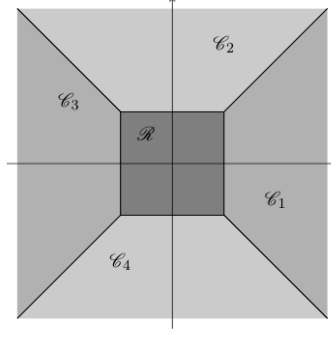


Рисунок 1.6 – Разбиение области частот для непрерывной системы шиарлетов на конусах

Определение 3. Непрерывной системой шиарлетов на конусах $\mathcal{SH}(\phi, \psi, \tilde{\psi})$ для функций $\phi, \psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ называется множество

$$\mathcal{SH}(\phi, \psi, \tilde{\psi}) = \Phi(\phi) \cup \Psi(\psi) \cup \tilde{\Psi}(\tilde{\psi}) \quad (12)$$

где

$$\Phi(\phi) = \{\phi_t = \phi(\cdot - t) : t \in \mathbb{R}\} \quad (13)$$

$$\Psi(\psi) = \left\{ \psi_{a,s,t} = a^{-\frac{3}{4}} \psi(A_a^{-1} S_s^{-1}(\cdot - t)) : a \in (0,1], |s| \leq 1 + \sqrt{a}, t \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (14)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\psi}) = \left\{ \tilde{\psi}_{a,s,t} = a^{-\frac{3}{4}} \tilde{\psi}(\tilde{A}_a^{-1} S_s^{-1}(\cdot - t)) : a \in (0,1], |s| \leq 1 + \sqrt{a}, t \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (15)$$

$$\tilde{A}_a = \text{diag}(a^{\frac{1}{2}}, a) \quad (16)$$

Теперь параметр сдвига s может принимать лишь ограниченное множество значений, и таким образом мы можем определить лишь некоторое подмножество всех возможных направлений.

Кроме того, функция ϕ в области частот должна иметь компактный носитель недалеко от начала координат, чтобы система $\Phi(\phi)$ включала в себя область низких частот \mathcal{R} .

Аналогично непрерывной системе шиарлетов определяется непрерывная система шиарлетов на конусах.

Определение 4. Непрерывным шиарлет-преобразование на конусах функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ называется отображение

$$f \rightarrow \mathcal{SH}_{\phi, \psi, \tilde{\psi}} f(t', (a, s, t), (\tilde{a}, \tilde{s}, \tilde{t})) = (\langle f, \phi_t \rangle, \langle f, \psi_{a,s,t} \rangle, \langle f, \tilde{\psi}_{\tilde{a}, \tilde{s}, \tilde{t}} \rangle) \quad (17)$$

$$\text{где } (t', (a, s, t), (\tilde{a}, \tilde{s}, \tilde{t})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_{cone}^2 \quad (18)$$

$$\mathbb{S}_{cone} = \{(a, s, t): a \in (0, 1], |s| \leq 1 + \sqrt{a}, t \in \mathbb{R}^2\} \quad (19)$$

Шиарлет-преобразование можно получить, используя преобразование Фурье, в соответствии со следующим выражением [10]:

$$\mathcal{S}\mathcal{H}_\psi f(\widehat{a, s, t})(x) = a^{\frac{3}{4}} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(A_a S_s^T x)} \quad (20)$$

1.3 Дискретное шиарлет-преобразование

От введённого, описанным выше образом, непрерывного шиарлет-преобразования можно перейти к дискретному преобразованию, сконструировав дискретную систему шиарлетов [9]. Для этого необходимо разбить параметры шиарлетов на конечное множество дискретных значений и построить систему, которая по возможности будет сохранять свойства непрерывной системы, в том числе обеспечивать возможность обратного преобразования.

При построении такой системы будем придерживаться подхода шиарлет-преобразования на конусах, чтобы избежать трудно моделируемых значений параметра s .

Определение 5. Дискретной системой шиарлетов, связанной с шиарлетом ψ , называется множество

$$\mathcal{SH}(\psi) = \{\psi_{j,k,m} = a_j \psi(S_{j,k} A_{2^j}(\cdot - t_m)) : j, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^2\} \quad (21)$$

В общем случае, параметр масштаба выбирается из множества $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^+$. Параметры сдвига $\{s_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ выберем зависимыми от j , чтобы исследуемая направленность изменялась соответственно масштабу. Наконец, параметр смещения выберем из $c_1 \mathbb{Z} + c_2 \mathbb{Z}$ для некоторых $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}$, это обеспечит необходимую гибкость конструкции для некоторых применений.

Для изображения размера $M \times N$ принято определять дискретные значения параметров следующим образом:

$$a_j = 2^{-2j} = \frac{1}{4^j}, j = 0, \dots, j_0 - 1 \quad (22)$$

$$s_{j,k} = k2^{-j}, -2^j \leq k \leq 2^j \quad (23)$$

$$t_m = \left(\frac{m_1}{M}, \frac{m_2}{N} \right), m \in \mathcal{J} \quad (24)$$

$$\text{где } j_0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 N \right\rfloor, \mathcal{J} = \{(m_1, m_2): m_1 = 0, \dots, M-1, m_2 = 0, \dots, N-1\} \quad (25)$$

Преобразование Фурье элемента дискретной системы шиарлетов выражается как:

$$\hat{\psi}_{a,s,t}(\omega) = \hat{\psi} \left(A_{a,j}^T S_{s,j,k}^T \omega \right) e^{-2\pi i \langle \omega, t_m \rangle} = \hat{\psi}_1(4^{-j} \omega_1) \hat{\psi}_2 \left(2^j \frac{\omega_1}{\omega_2} + k \right) e^{-2\pi i \langle \omega, \left(\frac{m_1}{M}, \frac{m_2}{N} \right) \rangle} \quad (26)$$

$$\text{где } \Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2): \omega_1 = -\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor - 1, \omega_2 = -\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \quad (27)$$

Аналогично непрерывному преобразованию, вводится дискретное шиарлет-преобразование.

Для некоторой функции $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ дискретным шиарлет преобразованием функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ называется отображение

$$f \rightarrow \mathcal{SH}_\psi f(j, k, m) = \langle f, \psi_{j,k,m} \rangle, (j, k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2 \quad (28)$$

Таким образом, \mathcal{SH}_ψ ставит в соответствие некоторой функции f коэффициенты $\mathcal{SH}_\psi f(j, k, m)$, связанные с масштабом j , ориентацией k и смещением m .

На данный момент следует выяснить, в каких случаях будет возможным обратное шиарлет-преобразование. Восстановление возможно, если система $\mathcal{SH}(\psi)$ образует фрейм Парсеваля в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Располагая разложением функции по фрейму Парсеваля, мы можем восстановить её естественным образом как сумму произведений каждого коэффициента на соответствующий шиарлет.

В работе [9] доказывается следующее предложение: если $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ — классический шиарлет, то $\mathcal{SH}(\psi)$ образует фрейм Парсеваля в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Классический шиарлет ψ является локализованной функцией. С учётом указанного выше предложения можно утверждать, что существует фрейм

Парсеваля $\mathcal{SH}(\psi)$ локализованного дискретного шиарлета.

Свойство локализации необходимо для получения оптимальной разряженной аппроксимации при помощи шиарлетов. Снимая требование локализации функции ψ , мы сможем построить дискретные системы шиарлетов, образующие не только жёсткие фреймы, но и имеющие ортогональный базис.

Локализованные дискретные шиарлет-системы могут образовывать фреймы и жёсткие фреймы, не имея при этом ортогонального базиса.

Перенесём принцип разбиения области частот на конусы на дискретную систему шиарлетов.

Определение 6. Дискретной системой шиарлетов на конусах $\mathcal{SH}(\phi, \psi, \tilde{\psi}; c)$ для функций $\phi, \psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ и $c = (c_1, c_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$ называется множество

$$\mathcal{SH}(\phi, \psi, \tilde{\psi}; c) = \Phi(\phi; c_1) \cup \Psi(\psi; c) \cup \tilde{\Psi}(\tilde{\psi}; c) \quad (29)$$

где

$$\Phi(\phi; c_1) = \{\phi_m = \phi(\cdot - c_1 m) : m \in \mathbb{Z}\} \quad (30)$$

$$\Psi(\psi; c) = \left\{ \psi_{j,k,m} = 2^{\frac{3}{4}} \psi(S_k A_{2^j} \cdot - M_c m) : j \geq 0, |k| \leq \left\lfloor 2^{\frac{j}{2}} \right\rfloor, m \in \mathbb{Z}^2 \right\} \quad (31)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\psi}; c) = \left\{ \tilde{\psi}_{j,k,m} = 2^{\frac{3}{4}} \tilde{\psi}(S_k \tilde{A}_{2^j} \cdot - \tilde{M}_c m) : j \geq 0, |k| \leq \left\lfloor 2^{\frac{j}{2}} \right\rfloor, m \in \mathbb{Z}^2 \right\} \quad (32)$$

где $M_c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ и $\tilde{M}_c = \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$.

Функция ϕ называется масштабирующей функцией шиарлета, а функции $\psi, \tilde{\psi}$ — образующими. Как и в случае непрерывной системы, $\Phi(\phi; c_1)$ соответствует области низких частот, а $\Psi(\psi; c)$ и $\tilde{\Psi}(\tilde{\psi}; c)$ относятся к областям $\ell_1 \cup \ell_3$ и $\ell_2 \cup \ell_4$ соответственно.

Определение 7. Пусть $\Lambda = \mathbb{N}_0 \times \left\{ -\left\lfloor 2^{\frac{j}{2}} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor 2^{\frac{j}{2}} \right\rfloor \right\} \times \mathbb{Z}^2$. Дискретным шиарлет-преобразованием на конусах функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ для функций $\phi, \psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ называется отображение

$$f \rightarrow \mathcal{H}_{\phi, \psi, \tilde{\psi}} f \left(m', (j, k, m), (\tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{m}) \right) = \langle f, \phi_{m'} \rangle, \langle f, \psi_{j,k,m} \rangle, \langle f, \tilde{\psi}_{\tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{m}} \rangle \quad (33)$$

где $(m', (j, k, m), (\tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{m})) \in \mathbb{Z}^2 \times \Lambda \times \Lambda$.

Выше указано, что построить дискретную систему шиарлетов с ортогональным базисом представляется невозможным, однако нашей целью является построение фрейма Парсеваля.

В работе [9] доказано, что $\Psi(\psi)$ образует фрейм Парсеваля для $L^2(\ell_1 \cup \ell_3)^\vee = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \text{supp}(\hat{f}) \subset \ell_1 \cup \ell_3\}$. Очевидно, то же утверждение справедливо и для $\tilde{\Psi}(\tilde{\psi})$ в подпространстве $L^2(\ell_2 \cup \ell_4)^\vee$.

Таким образом, фрейм Парсеваля для всего пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ можно построить объединением фреймов Парсеваля, относящихся к различным конусам в области частот.

Следует отметить, что при таком построении фреймов Парсеваля коэффициенты шиарлет-преобразования, перекрывающиеся в области частот на прямых $\xi_1 = \pm \xi_2$ могут образовать разрывы.

На рисунке 1.7 изображено разбиение области частот при описанном построении фреймов Парсеваля.

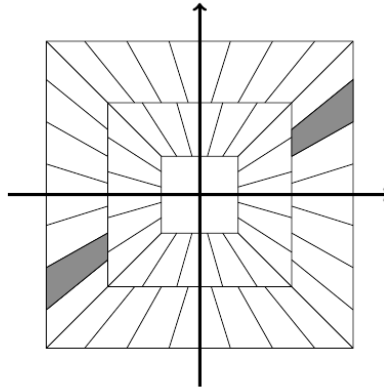


Рисунок 1.7 – Разбиение области частот, порождаемое фреймами Парсеваля для шиарлетов на конусах

Поскольку одной из главных причин, побудивших к построению системы шиарлетов, является возможность приближённого представления исходного изображения и возможность эффективной алгоритмической реализации, важно выяснить, какова точность аппроксимации исходной функции в данном базисе.

Обозначим за f_N приближение, полученное восстановлением N наибольших коэффициентов шварц-преобразования исходной функции f . В [9] приводится следующая оценка приближения исходного изображения:

$$\|f - f_N\|^2 \leq C N^{-2} (\log N)^3 \quad (34)$$

$$N \rightarrow \infty,$$

где константа C не зависит от N .

Как отмечено выше, для эффективного вычисления коэффициентов шварц-преобразования можно воспользоваться преобразованием Фурье.

Для дискретного шварц-преобразования аналогично применимы алгоритмы дискретного быстрого преобразования Фурье, однако в зависимости от реализации необходимо учитывать специфику представления области частот.

2 Алгоритм дискретного шиарлет преобразования

На общем принципе дискретизации шиарлет-преобразования, описанном выше, построены существующие алгоритмические реализации дискретного шиарлет-преобразования. Это делает возможным обработку двумерных массивов данных, в том числе и цифровых изображений.

2.1 Реализации дискретного шиарлет-преобразования

Рассмотрим две известные реализации дискретного шиарлет-преобразования.

Алгоритм под названием «Fast Finite Shearlet Transform» (Tomas Hauser) [7]. В его основу положено дискретное быстрое прямое и обратное преобразования Фурье.

В качестве материнского вейвлета в данной реализации используется вейвлет Мейера. Область частот разбивается на четыре конуса и область низких частот. Затем, согласно формуле Планшереля:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{MN} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (35)$$

Тогда для $\ell_1 \cup \ell_3$ имеем

$$\begin{aligned} sh(f)(j, k, m) &= \langle f, \psi_{j,k,m} \rangle = \frac{1}{MN} \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k,m} \rangle = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{\omega \in \Omega} e^{-2\pi i \langle \omega, \left(\frac{m_1}{M} \right) \rangle} \hat{\psi}(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2) \hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{\omega \in \Omega} \hat{\psi}(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2) \hat{f}(\omega_1, \omega_2) e^{-2\pi i \langle \omega, \left(\frac{m_1}{M} \right) \rangle} \end{aligned} \quad (36)$$

Введя обозначение:

$$\hat{g}_{j,k}(\omega) = \hat{\psi}(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2) \hat{f}(\omega_1, \omega_2) \quad (37)$$

данное выражение может быть записано в виде:

$$sh(f)(j, k, m) = \frac{1}{MN} \sum_{\omega \in \Omega} \hat{g}_{j,k}(\omega) e^{-2\pi i \langle \omega, \left(\frac{m_1}{M} \right) \rangle} \quad (38)$$

Тогда шиарлет преобразование функции f можно вычислить как обратное преобразование Фурье:

$$sh(f)(j, k, m) = ifft2(\hat{g}_{j,k}) = ifft2(\hat{\psi}(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2)\hat{f}(\omega_1, \omega_2)) \quad (39)$$

Аналогичные выражения можно получить для других областей. В конечном итоге, шиарлет-преобразование функции f вычисляется следующим образом:

$$sh(f)(j, k, m) = \begin{cases} ifft2(\hat{\phi}(\omega_1, \omega_2)\hat{f}(\omega_1, \omega_2)) & \text{в области низких частот} \\ ifft2(\hat{\psi}(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2)\hat{f}(\omega_1, \omega_2)) & \text{для } \ell_1 \cup \ell_3 \\ ifft2(\hat{\psi}(4^{-j}\omega_2, 4^{-j}k\omega_2 + 2^{-j}\omega_1)\hat{f}(\omega_1, \omega_2)) & \text{для } \ell_2 \cup \ell_4 \\ ifft2(\hat{\psi}^\times(4^{-j}\omega_1, 4^{-j}k\omega_1 + 2^{-j}\omega_2)\hat{f}(\omega_1, \omega_2)) & \text{при } |k| = 2^j \end{cases} \quad (40)$$

Для «проблемной» области на стыке конусов ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 преобразование вычисляется отдельно.

Отмечается, что в теории алгоритм применим к изображениям произвольных размеров, однако данная реализация принимает на вход только квадратные изображения, поскольку возникают затруднения при обращении с коэффициентами на диагоналях.

Результат работы данного алгоритма приведён в приложении А.

Другой подход к вычислению шиарлет-преобразования под названием «ShearLab» (Wang-Q. Lim) описан в [13]. Сама программа доступна в сети Интернет по адресу <http://www.shearlab.org/>. Данная реализация по-прежнему основывается на дискретном быстром преобразовании Фурье, однако несколько другим образом интерпретирует область частот.

Плоскость, согласно общей схеме, разбивается на конусы, область низких частот и множество точек, оказавшихся на стыках конусов. Затем осуществляется переход к псевдополярным координатам (рисунок 2.1), в которых вычисляется модифицированное преобразование Фурье.

Однако поскольку переход к псевдополярным координатам не является

изометрическим отображением, возникает необходимость в восстановлении «плотности» фрагментов, получающихся при дискретизации области частот. В качестве выхода из этой ситуации авторы предлагают компенсировать искажение плотности при помощи довешивающих функций (weighting functions).

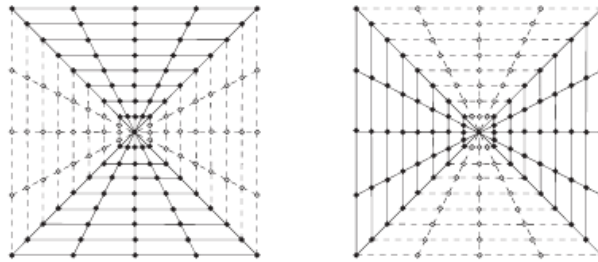


Рисунок 2.1 – Разбиение области частот на конусы в псевдополярных координатах

Целью компенсации является восстановление структуры координатной сетки таким образом, чтобы для преобразования Фурье вновь была справедлива формула Планшереля (рис. 2.2).

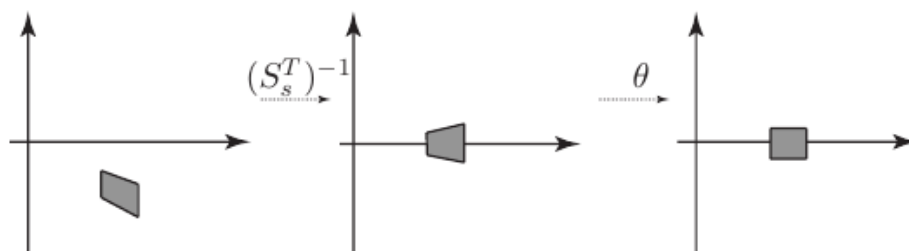


Рисунок 2.2 – Компенсация участка области частот при помощи довешивающей функции

Изучаемый алгоритм выполняет следующую последовательность действий:

- 1) классическое преобразование Фурье;
- 2) замена переменных и переход к полярной системе координат;
- 3) компенсация радиальной плотности путём домножения на

довешивающие функции;

- 4) разбиение плоскости на прямоугольные фрагменты;
- 5) обратное преобразование Фурье каждого фрагмента.

В таком случае восстановление исходного изображения из коэффициентов его шиарлет-преобразования производится выполнением сопряжённых действий в обратном порядке.

Дискретное шиарлет-преобразование применимо для обработки изображений. Известны следующие результаты, которых можно добиться, применяя к коэффициентам шиарлет-преобразования различные фильтры:

- а) выделение контуров объектов на изображениях;
- б) шумоподавление;
- с) разделение изображений (морфологический анализ).

2.2 Расчетная схема вычислительной методики

Представим кратко описание алгоритмического обеспечения для выполнения геометрического анализа данных геоэкологического мониторинга (рисунок 2.3–2.6).

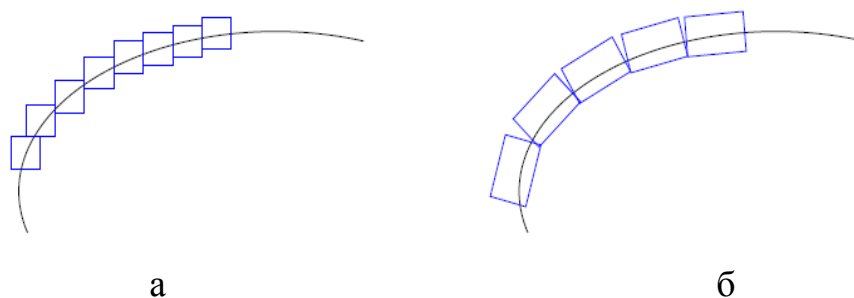
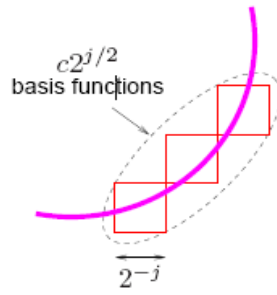
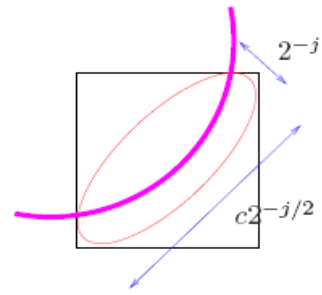


Рисунок 2.3 – Сравнение изотропного и анизотропного описания линий
(границ, разрывов)

- а) – вейвлет-покрытие: изотропные элементы для описания линии;
- б) – шиарлет-покрытие: анизотропные элементы для описания линии



вейвлет



шиарлет

Рисунок 2.4 – Оптимальное представление функций в \mathbb{R}^2

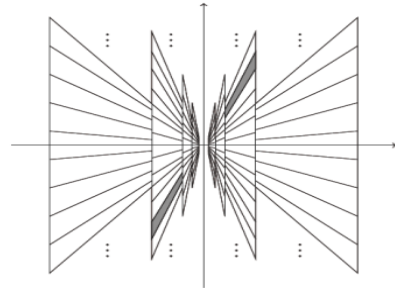
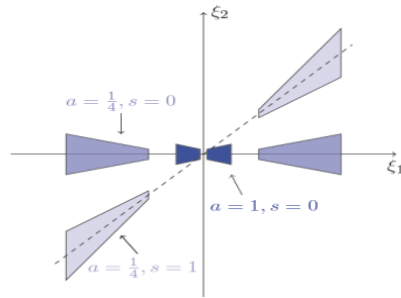


Рисунок 2.5 – Классические шиарлеты: Фурье-преобразование и поддержка домена из нескольких элементов системы шиарлетов для различных значений параметров a и s

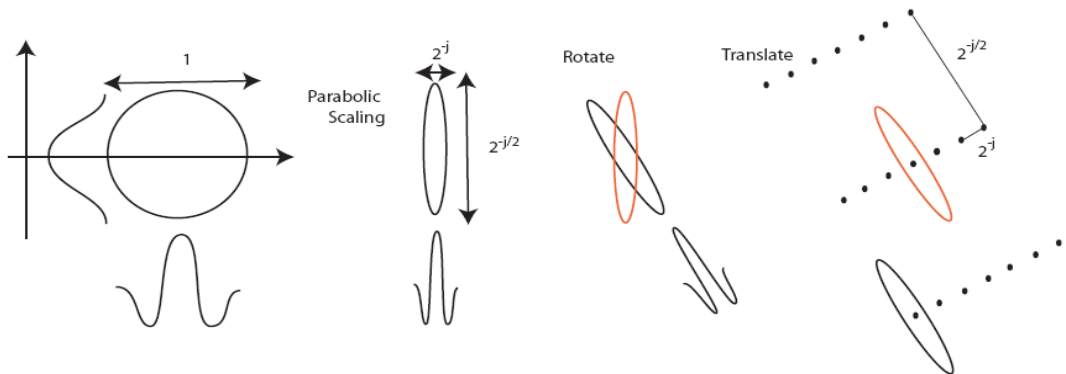


Рисунок 2.6 – Шиарлет-преобразование: параметризованные масштабы, местоположения и ориентации

Непрерывное шиарлет-преобразование:

$$f \mapsto (\langle f, \psi_{jkm} \rangle)_{jkm} = 2^{-j \frac{3}{4}} (\langle \hat{f}, \hat{\psi}(S_k^T A_j \xi) e^{-i(A_j S_k m)^T \xi} \rangle)_{jkm} \quad (41)$$

Пять основных этапов общей алгоритмической схемы методики:

$$f \xrightarrow{(1)} \hat{f} \xrightarrow{(2)} \hat{f}(r, \omega) \xrightarrow{(3)} r \cdot \hat{f}(r, \omega) \xrightarrow{(4)} r \cdot \hat{f}(r, \omega) \cdot 2^{-j\frac{3}{4}} \hat{\psi}(S_k^T A_j(r, \omega)) \xrightarrow{(5)} \langle f, \psi_{jkm} \rangle \quad (42)$$

- 1) Классическое Фурье-преобразование.
- 2) Замена переменных и переход в псевдо-полярную систему координат.
- 3) Компенсация радиальной плотности путём умножения на довешивающие функции.
- 4) Разбиение плоскости на прямоугольные «плитки».
- 5) Обратное Фурье-преобразование каждой «плитки».

Таким образом, вычислительная процедура шиарлет-преобразования состоит из следующих этапов:

- а) Вычисление нечетных частот дискретного Фурье-преобразования (НЧ-ДПФ) входного изображения.
- б) Анализ нечетных частот дискретного Фурье-преобразования (НЧ-ДПФ) входного изображения с помощью банка пирамидальных фильтров Лапласа (субдискретизация).
- в) Применение направленных фильтров к полученным подзонам.
- г) Выполнение сдвига по поддиапазнам, чтобы прямоугольник находился в центральной части частотной области.
- д) Выполнение одномерных субдискретизаций, чтобы избавиться от нулевых коэффициентов дискретного Фурье-преобразования (ДПФ).
- е) Вычисление обратного дискретного Фурье-преобразования (НЧ-ДПФ) с нечетными частотами для каждой подзоны (рисунок 2.7).

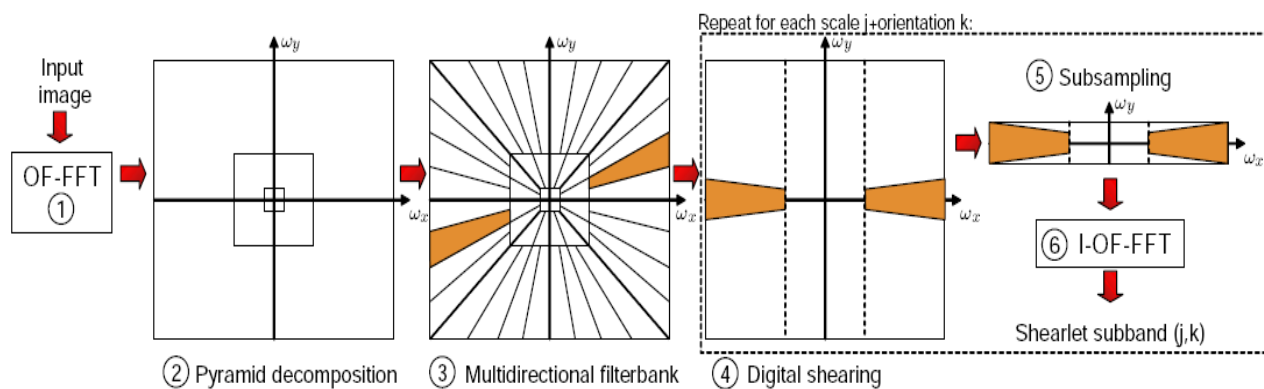


Рисунок 2.7 – Алгоритм шииарлет-преобразования: ОФ-БПФ выполняется с нечетными частотами, ДПФ реализован с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ)

3 Вычислительная методика обработки изображений

Предлагается вычислительная методика решения указанных выше задач (спектральная декомпозиция и контрастирование), которая состоит из следующих этапов:

- подготовительный этап, когда исходное изображение форматируется под расчетный шаблон и намечается последовательность расчетных процедур для оптимального решения поставленной задачи;

- запуск и настройка алгоритмического обеспечения шиарлет-преобразования, выбор конкретного алгоритма в зависимости от поставленной задачи и от условий яркости и контрастности изображений;

- загрузка и обработка исходных изображений для различных расчетных условий в зависимости от поставленной задачи;

- анализ получаемых расчетных изображений в результате шиарлет-преобразования, контрастирование изображения на основе применения алгоритмов: А – алгоритм FFST (Hauser, 2013); В – алгоритм Shearlet toolbox (Easley, Labate, 2013); С – алгоритм Shearlab (Kutyniok, Lim, 2011); D – алгоритм TGVSHCS (Jing, 2013).

В рамках информационной системы предлагаются решения типовых задачи геометрического анализа данных на основе алгоритмов шиарлет-преобразования: шумоподавления изображений; выделения контура объекта на изображении; разделение изображения. Предлагается для применения 4 алгоритма (А-D): Алгоритм А демонстрирует действие шиарлет-преобразования и выделение сингулярности объекта, модификацию которого предлагаем применять для выделения контура объектов на изображении;

Алгоритм В показывает работу шиарлет-преобразования для решения задач шумоподавления изображения (проводились оценки с шумом Гаусса);

Алгоритм С демонстрирует работу шиарлет-преобразования для решения задач шумоподавления, а также для разделения изображений (применяется шум Гаусса);

Алгоритм D решает задачу фильтрации шума.

Таким образом, в качестве примера обработки данных геоэкологического мониторинга выполнено исследование используемых алгоритмов шиарлет-преобразования для решения указанных прикладных задач. Из приведенных рисунков видно, что алгоритм В предпочтителен для решения задачи шумоподавления.

В рамках решения задачи спектральной декомпозиции данных наблюдений предложено обоснование алгоритма быстрого дискретного шиарлет-преобразования (FFST, Hauser) для выделения значимой частоты, соответствующей выделенной геометрической особенности изучаемого геообъекта. Предложенный способ применения алгоритма позволяет повысить точность выделения контуров и визуальное качество изображений изучаемых объектов (для уточнения оценки площади и периметра геообъекта).

Рассмотрим задачу выделения контура объектов на изображении [7]. Исследование алгоритма А выявило, что контуры объектов можно получить как сумму коэффициентов шиарлет-преобразования фиксированного значения параметра для последнего масштаба и всевозможных значений параметра сдвига. В связи с этим предлагается использовать эту особенность при решении задач спектральной декомпозиции и контрастирования:

$$f_{cont} = \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} sh_{\psi}(f(j^*, k, m)) \quad (43)$$

где sh_{ψ} ставит в соответствие исследуемой функции f коэффициенты $sh_{\psi}f(j^*, k, m)$, полученные для последнего масштаба j^* , поворотов (ориентацией) k и смещений m , где k_{max} – максимальное количество поворотов, m_{max} – максимальное количество смещений.

Результаты решения этой задачи с помощью модифицированного алгоритма *FFST* показаны на различных данных (рис. 3.1–3.2). Алгоритм предлагается применять для выделения контуров для характерной частоты.



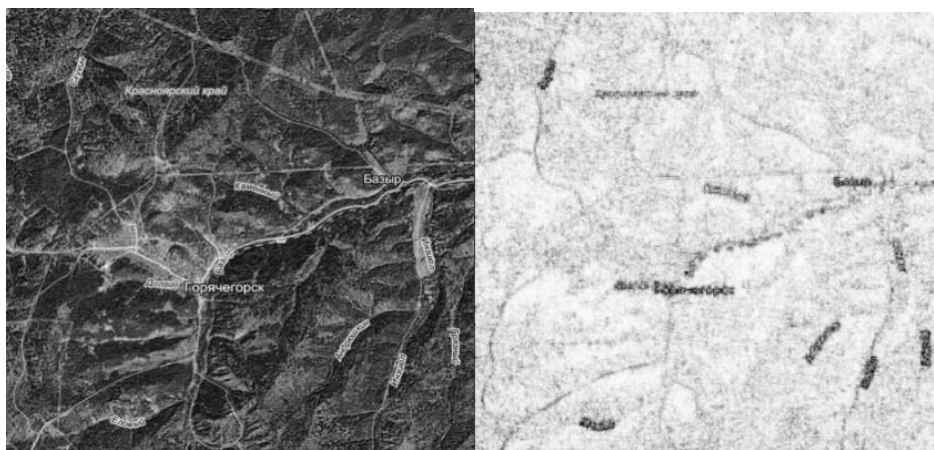
а

б

Рисунок 3.1 – Выделение контура на модельном изображении

а) – исходное изображение

б) – результат анализа, выделение контура (инвертированное изображение)



а

б

Рисунок 3.2 – Выделение контура объектов на изображения данных геоэкологического мониторинга

а) – исходное изображение данных геоэкологического мониторинга

б) – результат анализа: выделение контура объектов
(инвертированное изображение)

Результаты решения этой задачи с помощью модифицированного алгоритма *FFST* при обработке данных медицинской томографии приведены на рисунке 3.3.

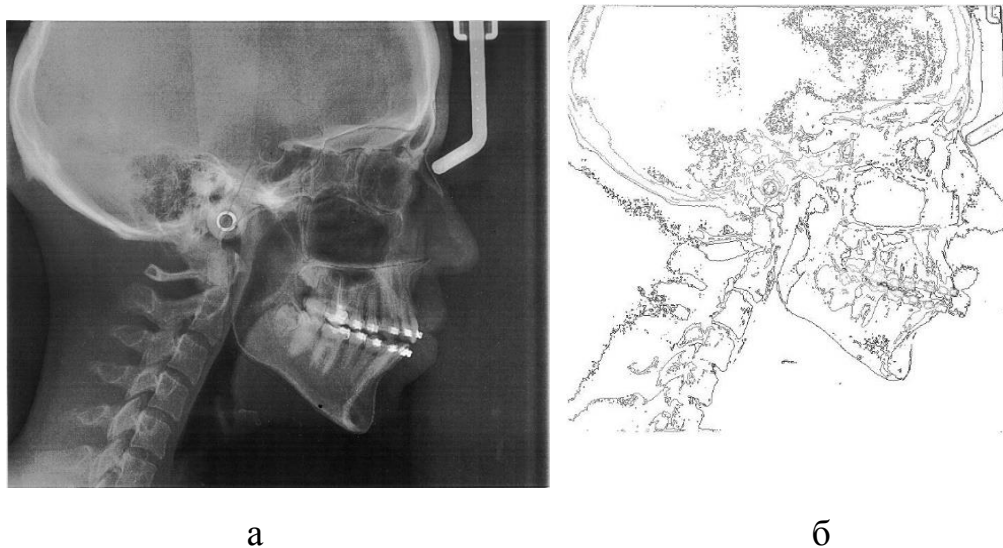


Рисунок 3.3 – Выделение контура объекта на изображения данных томографии
а) – исходное изображение (оригинал); б) – результат обработки: выделение контура при помощи алгоритма FFST (инвертированное изображение)

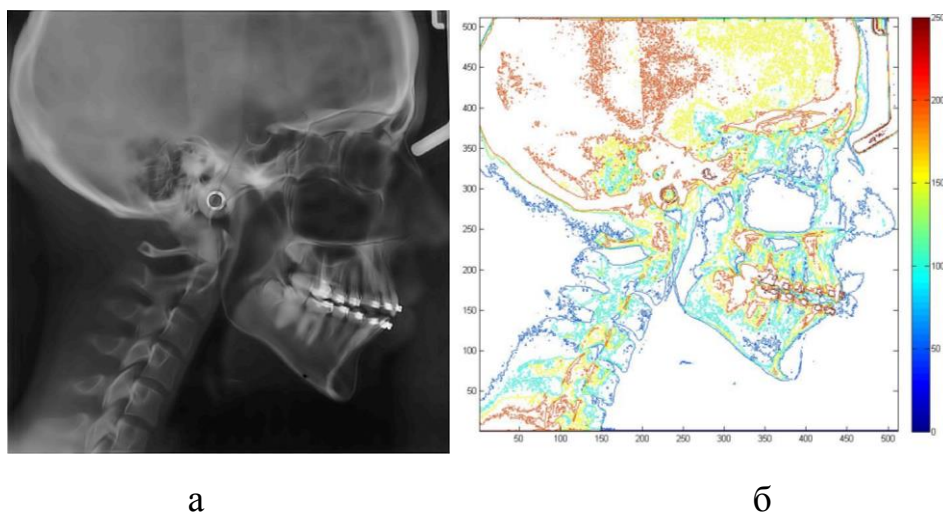


Рисунок 3.4 – Выделение контура объекта на изображения данных томографии
а) – исходное изображение (оригинал)
б) – результат обработки: выделение контура при помощи алгоритма FFST (контрастирование)

Выполнено исследование алгоритма *A* и на рисунке 3.4 приведены результаты решения задачи выделения линейных особенностей для визуальных данных геоэкологического мониторинга.

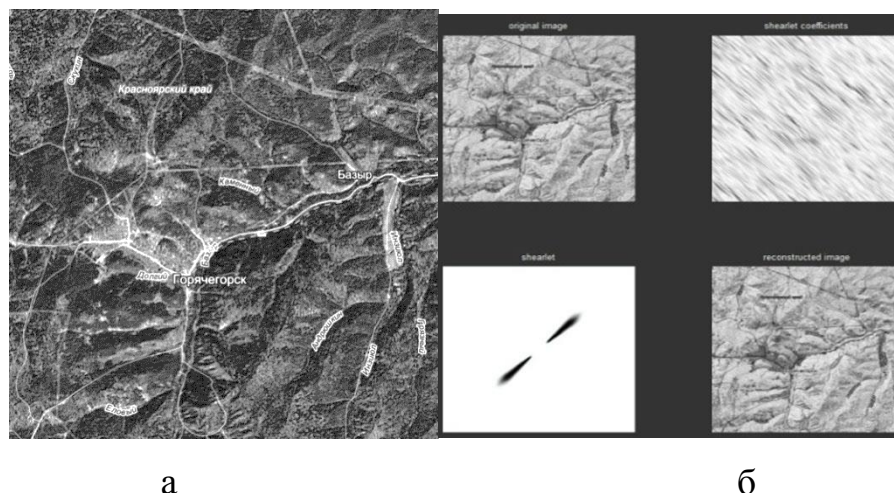


Рисунок 3.5 – Результаты решения задачи спектральной декомпозиции и выделения линейных особенностей (сингулярности) геообъектов на основе алгоритма *A*

а) – исходное изображение

б) – обработка изображения (инвертированное изображение), где 1 – исходное изображение; 2 – шиарлет-коэффициенты;

3 – мгновенный шиарлет; 4 – восстановленное изображение

В рамках разработанной вычислительной методики выполнен также сравнительный анализ алгоритмов дискретного шиарлет-преобразования для решения базовых прикладных задач: фильтрации визуальных данных и шумоподавления на изображениях.

Для решения задачи шумоподавления выполнено исследование алгоритмов *B*, *C* и *D* для снимков из различных предметных областей (распространение пожара, медицинская томография; геоэкология и геодинамика, сейсмическая томография геосреды на нефть и газ).

Исследовались особенности работы алгоритмов *B*, *C* и *D* для различных условий яркости и контрастности изображений, проводились оценки для шума

Гаусса. На рисунках 3.5 – 3.6 приведены решения задачи шумоподавления на основе алгоритмов В, С и D. Проведен анализ алгоритмов В и С с использованием метрики PSNR.

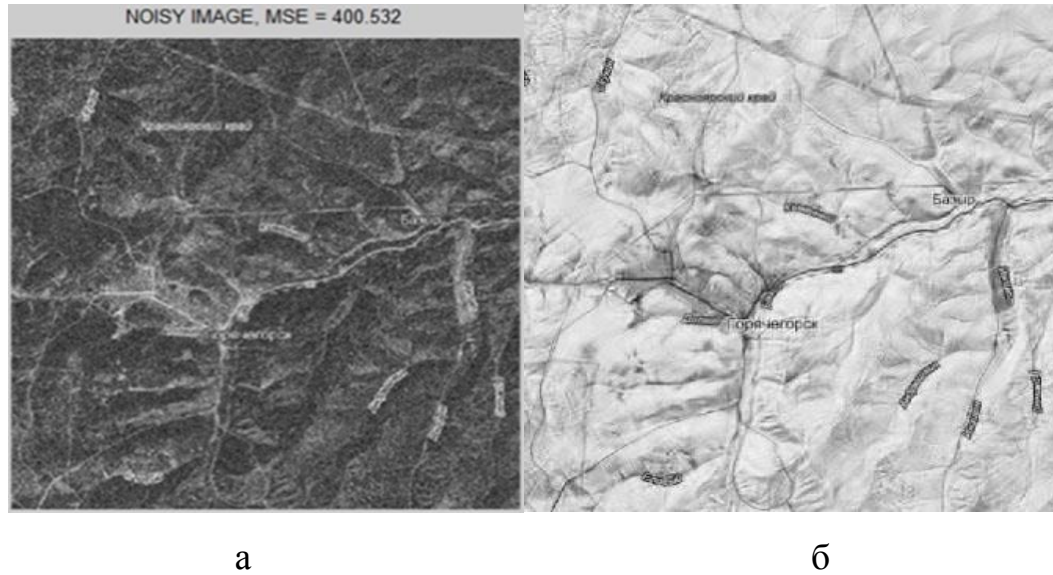


Рисунок 3.6 – Результаты решения задачи шумоподавления (алгоритм В)

а) – исходное изображение с шумом; б) – обработка изображения
(инвертированное изображение)

Метрика PSNR (peak signal-to-noise ratio – пиковое отношение сигнала к шуму) является соотношением между максимумом возможного значения сигнала и мощностью шума, искажающего значения сигнала. Метрика PSNR обычно измеряется в логарифмической шкале в децибелах и определяется через среднеквадратичную ошибку (СКО или MSE (mean square error)) для двух монохромных изображений I и K размера $m \times n$, одно из которых считается более зашумленным, чем другое, и вычисляется следующим образом:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |I(i, j) - K(i, j)|^2 \quad (44)$$

PSNR определяется так:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{MSE} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}} \right) \quad (45)$$

где MAX_I – это максимальное значение, принимаемое пикселем изображения.

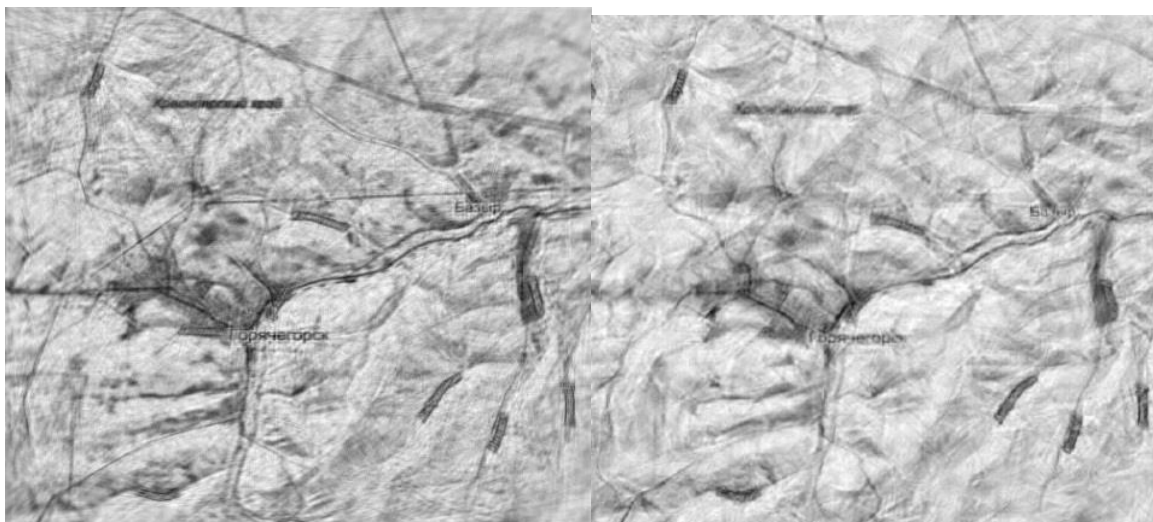


Рисунок 3.7 – Результаты решения задачи шумоподавления
(инвертированное изображения)

- а) – результаты решения задачи шумоподавления на основе алгоритм *C*
- б) – результаты решения задачи шумоподавления на основе алгоритм *D*

Таким образом, спектральная декомпозиция с помощью вейвлет- и шиарлет-преобразования является наиболее надежным способом спектрального разложения пространственного сигнала, характеризующая исследуемый геообъект и позволяет выделить основную частоту, которая характеризует его геометрические особенности. Следовательно, спектральная декомпозиция позволяет обнаружить и описать искомые закономерности.

На основе обоснованного способа применения алгоритма FFST решается задача контрастирования изображения для более четкого представления найденных геометрических особенностей и закономерностей геообъектов. Предлагается следующая методика выполнения контрастирования изображений после вейвлет- и шиарлет-преобразования:

- осуществляется поэлементно для выделения интересующих нас деталей;
- исключение несущественных особенности (фон);
- приведение изображения к виду, который удобен для визуальной интерпретации и дальнейшего анализа;

- оценка расчетных искомых параметров (решение задач на выделение контура и фильтрация на шумоподавление).

Далее представлены экспериментальные исследования применения разработанной вычислительной методики для различных предметных областей: следы воздействия цунами (цунами 2006 года, о. Симушир) (рисунок 3.8 – 3.9); следы катастрофического воздействия гигантских волн от падения метеорита в зал. Карпентария (Австралия) (рисунок 3.10); следы катастрофического воздействия гигантских волн от падения астероида в Индийский океан (о. Мадагаскар) (рисунок 3.11); следы катастрофического цунами (чилийское цунами 1960 г., бух. Вальпараисо, Чили) (рисунок 3.12).

Выполнены также спектральная декомпозиция и контрастирование результатов расчета для выделения закономерностей в исследуемых визуальных данных (оценка периметра и площади нефте-газоносного коллектора).



Рисунок 3.8. Исходное изображение курильского побережья (верхнее изображение: до цунами; нижнее – после цунами)

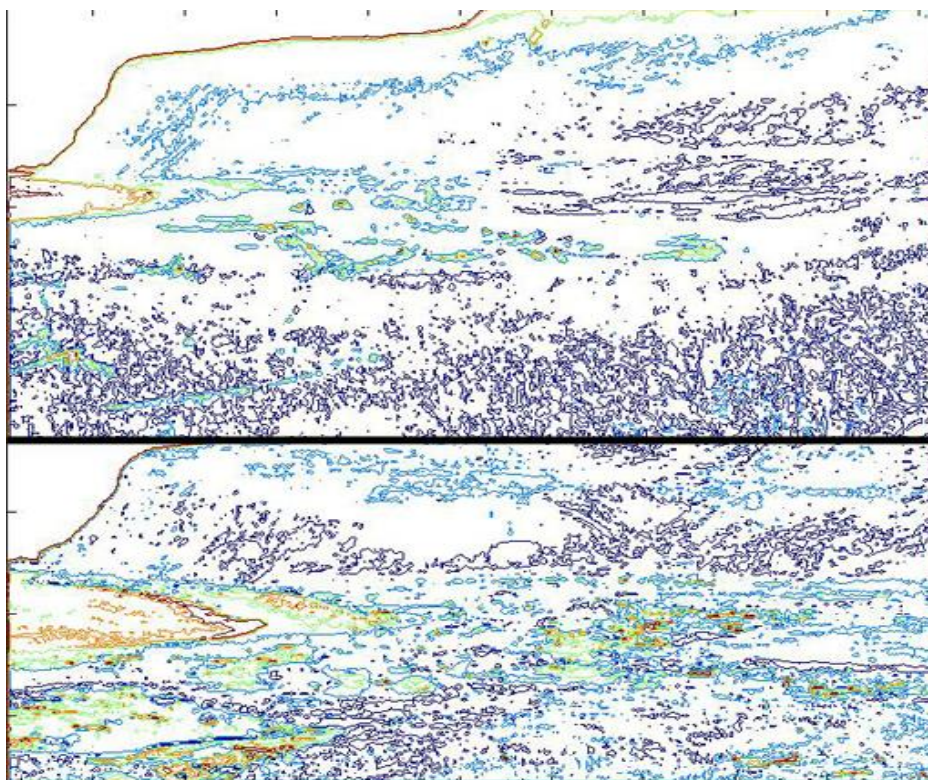
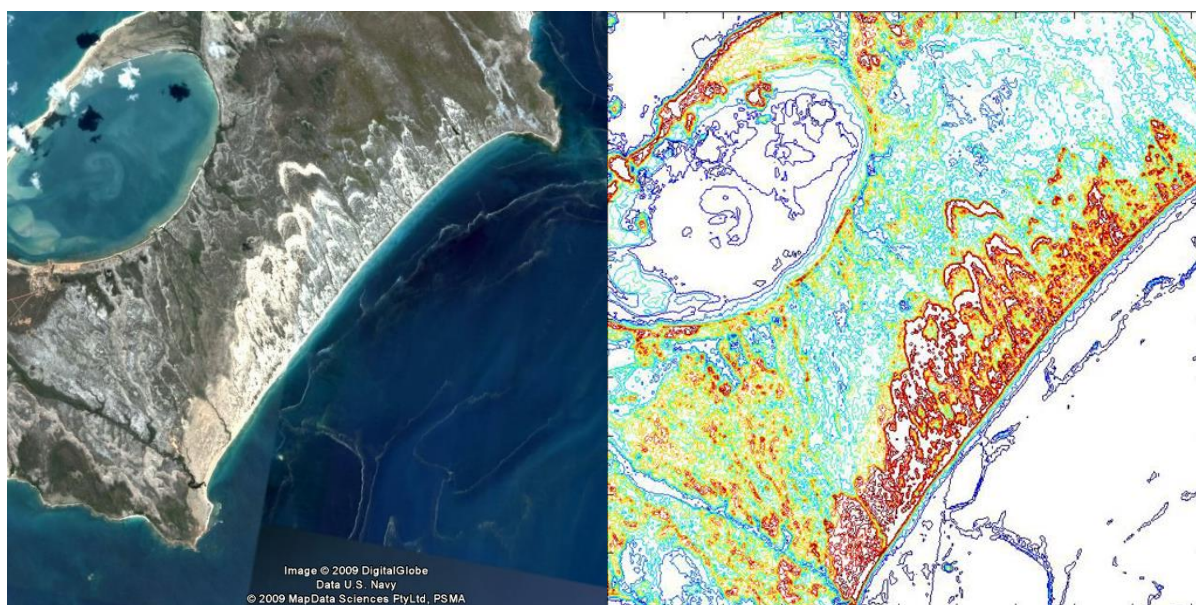


Рисунок 3.9. Обработанное изображение курильского побережья
(верхнее изображение: до цунами; нижнее – после цунами), (contour (C, 10))



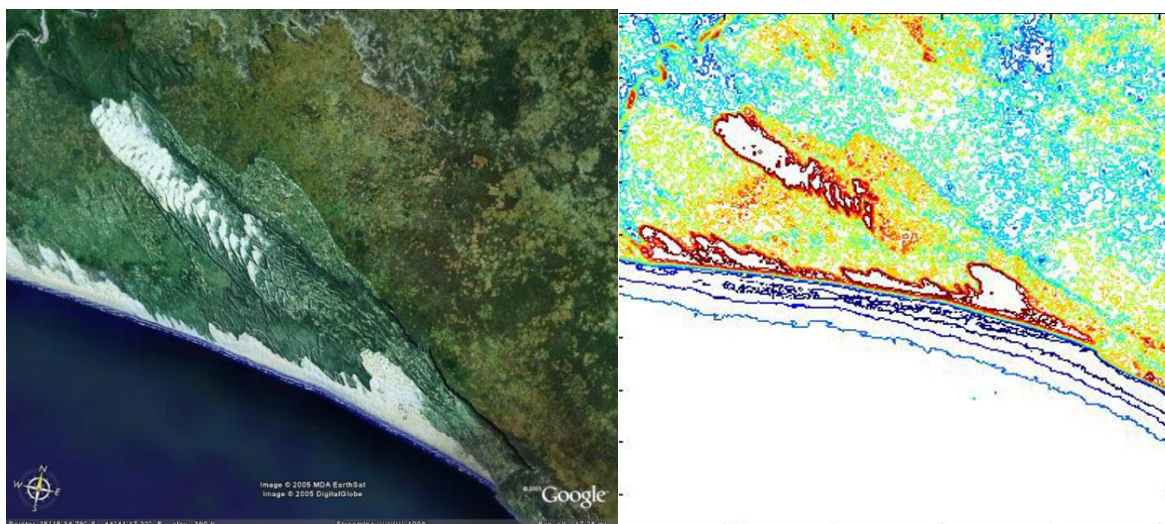
а

б

Рисунок 3.10 – Результаты решения задачи выделения контура на основе
алгоритма FFST

а) – Исходное изображение шеврона в зал. Карпентария

б) – Обработанное изображение (contour (C, 10))



а

б

Рисунок 3.11 – Результаты решения задачи выделения контура на основе алгоритма FFST

а) – Исходное изображение шеврона Fenambosy;

б) – Обработанное изображение (contour (C, 5)).

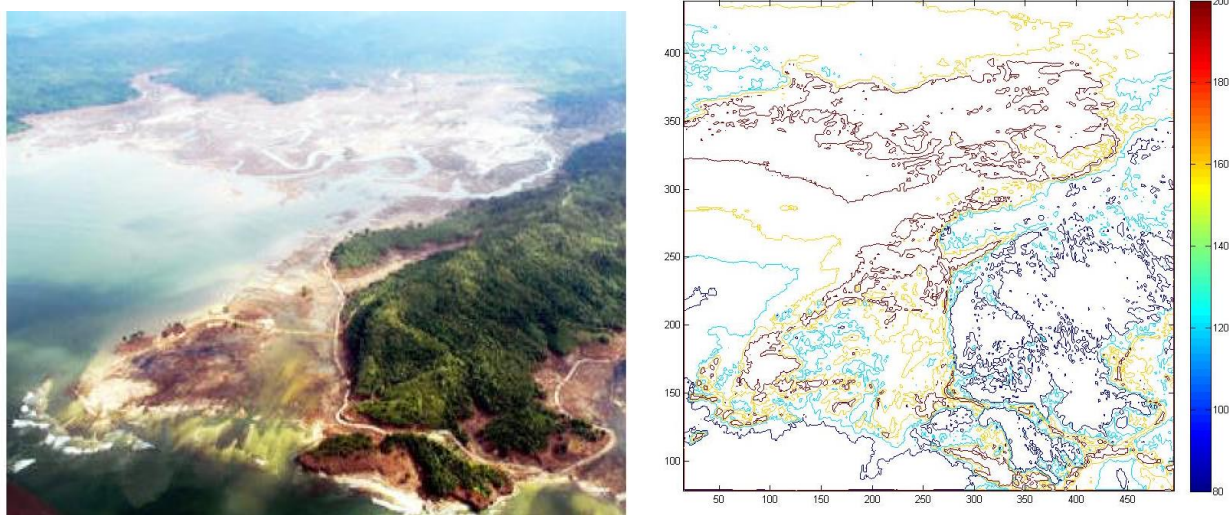
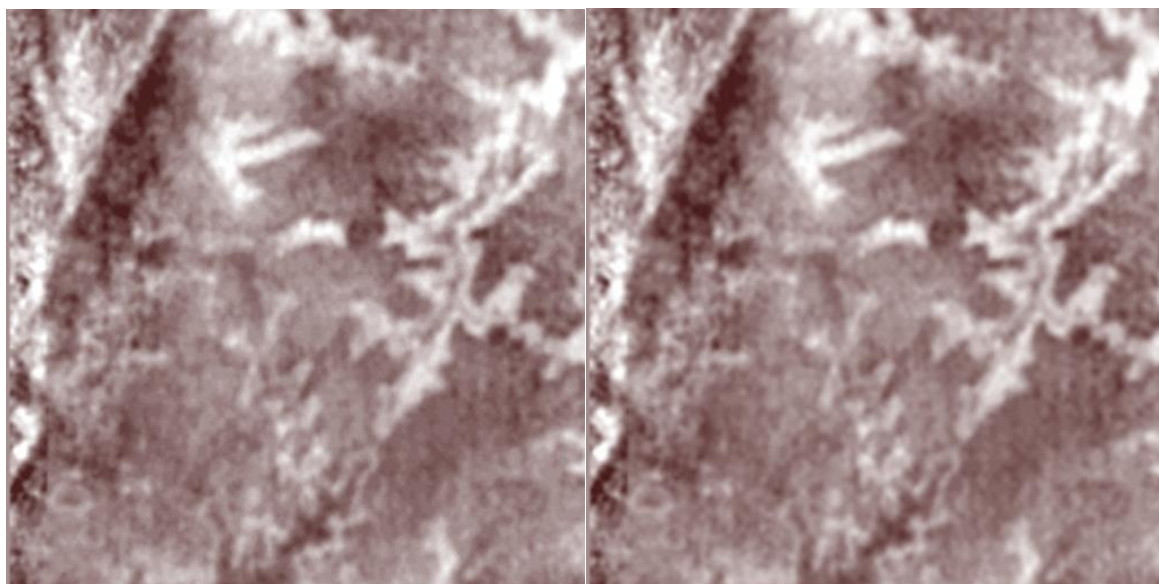


Рисунок 3.12 – Результаты решения задачи выделения контура на основе алгоритма FFST

а) – Исходное изображение чилийского побережья
(катастрофическое цунами 1960 г.)

б) – Обработанное изображение



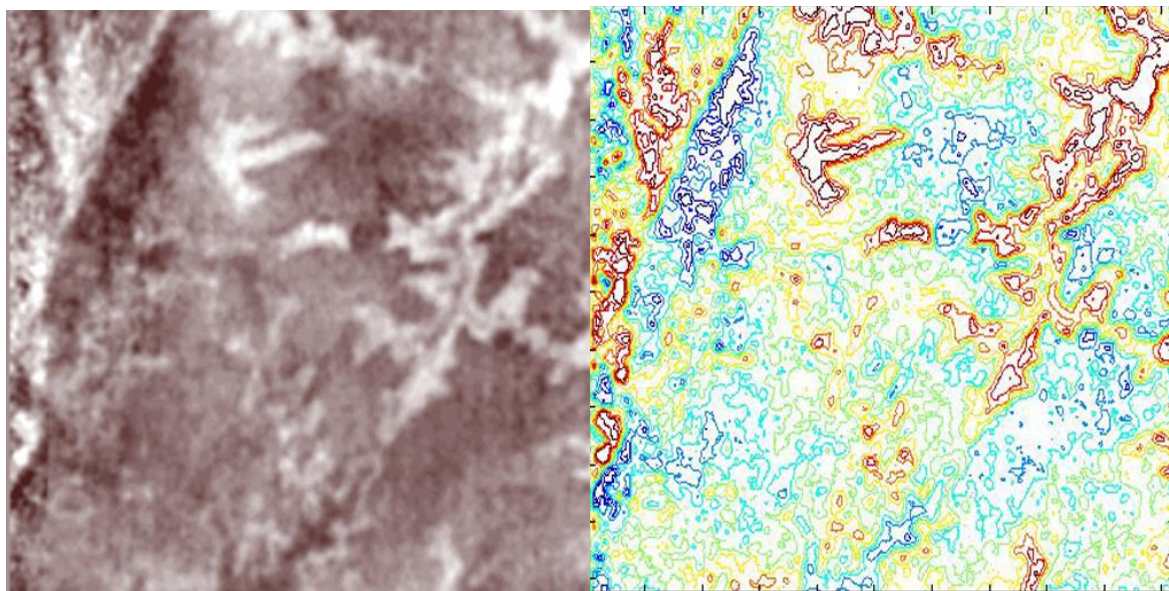
а

б

Рисунок 3.13 – Результаты решения задачи шумоподавления
(вейвлет Мейера)

а) – исходное изображение нефтяной залежи

б) – обработка изображения при помощи вейвлета Мейера (фильтрация)



а

б

Рисунок 3.14 – Выделение контура объекта на изображении данных
нефтяной залежи

а) – исходное изображение (оригинал)

б) – результат обработки: выделение контура при помощи алгоритма FFST

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в результате проведенных исследований:

1. Изучено непрерывное и дискретное шиарлет-преобразования, включающие описание существующего современного алгоритмического обеспечения.

2. В рамках решения задачи спектральной декомпозиции данных наблюдений предложено обоснование алгоритма быстрого дискретного шиарлет-преобразования (FFST, Hauser) для выделения значимой частоты, соответствующей выделенной геометрической особенности изучаемого геообъекта. Предложенный способ применения алгоритма позволяет повысить точность выделения контуров и визуальное качество изображений изучаемых объектов (для уточнения оценки площади и периметра геообъекта).

3. Решая задачу выделения контура и фильтрации на изображении, предложена методика контрастирования результатов расчета для более четкого выделения обнаруженных закономерностей в исследуемых визуальных данных.

4. В рамках экспериментальных исследований успешно решены задачи геоэкологического мониторинга и медицинской томографии, а именно: разделение точек и кривых на изображениях; выделение контура объектов на изображениях, фильтрация шума на визуальных данных на основе алгоритмов шиарлет-преобразования.

Результаты работы использовались в совместных исследованиях с красноярской Медакадемией, ЭЦ «РОПР», НГУ и ИВМиМГ СО РАН, а также опубликованы в трудах научных конференций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Donoho D. L., Kutyniok G. Geometric separation using a wavelet-shearlet dictionary // SampTA'09 (Marseille, France, 2009), Proc., 2009.
2. Easley G. R., Labate D., Vishal P. M. Directional Multiscale Processing of Images Using Wavelets with Composite Dilations // Journal of mathematical imaging, 2014. Volume 48, Issue 1. Pages 13-34.
3. Guo K., Kutyniok G., Labate D. Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators // Wavelets and Splines (Athens, GA, 2005), Nashboro Press, Nashville, TN, 2006. P. 189-201.
4. Guo K., Labate D. Optimally Sparse Multidimensional Representation using Shearlets // SIAM J Math. Anal., 2007. V. 39. P. 298-318.
5. Guo K., Labate D. Optimally sparse 3D approximations using shearlet representations // Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences. 2010. V. 17. P. 126-138.
6. Guo K., Labate D., W.-Q Lim, Edge analysis and identification using the Continuous Shearlet Transform // Appl. Comput. Harmon. Anal., 2009. V. 27. P. 24-46.
7. Hauser S. Fast Finite Shearlet Transform. – Режим доступа: <http://www.mathematik.uni-kl.de/fileadmin/image/haeuser/software/FFST.zip>
8. Kutyniok G., Labate D. Construction of regular and irregular shearlet frames // J. Wavelet Theory and Appl., 2007, N 1, P. 1-10.
9. Kutyniok G., Labate D. Introduction to shearlets. In Shearlets. Multiscale analysis for multivariate data. – Boston, MA: Birkhauser, 2012. P. 1-38.
10. Kutyniok G., Sauer T. From wavelets to shearlets and back again // In Approximation theory XII. Proceedings of the 12th international conference (San Antonio, TX, USA, March 4-8, 2007). Brentwood, TN: Nashboro Press, 2008. P. 201-209.
11. Labate D., Easley G., Lim W. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform // Applied Computational Harmonic Analysis, 2008. V. 25. P. 25-46.

12. Labate D., Lim W.-Q., Kutyniok G., Weiss G. Sparse multidimensional representation using shearlets // Wavelets XI (San Diego, CA, 2005). SPIE Proc. 5914, SPIE, Bellingham, WA, 2005. P. 254-262.
13. Lim W.-Q. The discrete shearlet transform: a new directional transform and compactly supported shearlet frames // IEEE Trans. Imag. Proc., 2010. V. 19. P. 1166-1180.
14. Zhuang X. University of Osnabrueck. ShearLab A rationally designed digital shearlet transform. [сайт] – Режим доступа: <http://shearlab.org/>
15. Donoho D.L., Kutyniok G. Microlocal analysis of the geometric separation problem. Preprint, 2010.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обработка изображений при помощи алгоритма FFST (выделение контура)

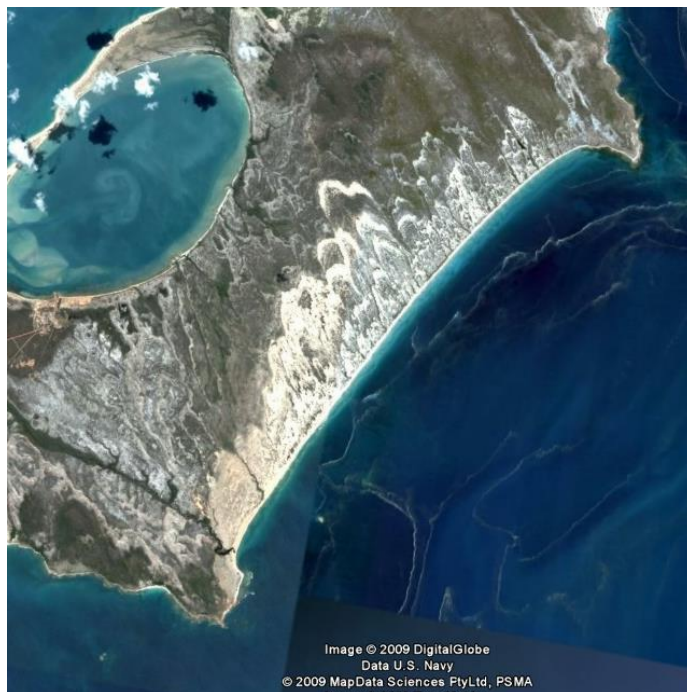


Рисунок А.1. Исходное изображение шеврона в заливе Карпентария

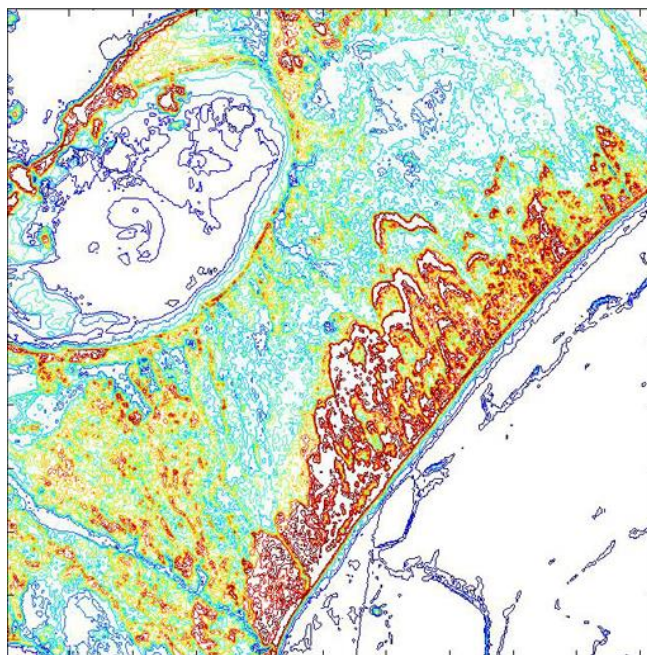


Рисунок А. 2. Обработка изображения (contour (C, 10))

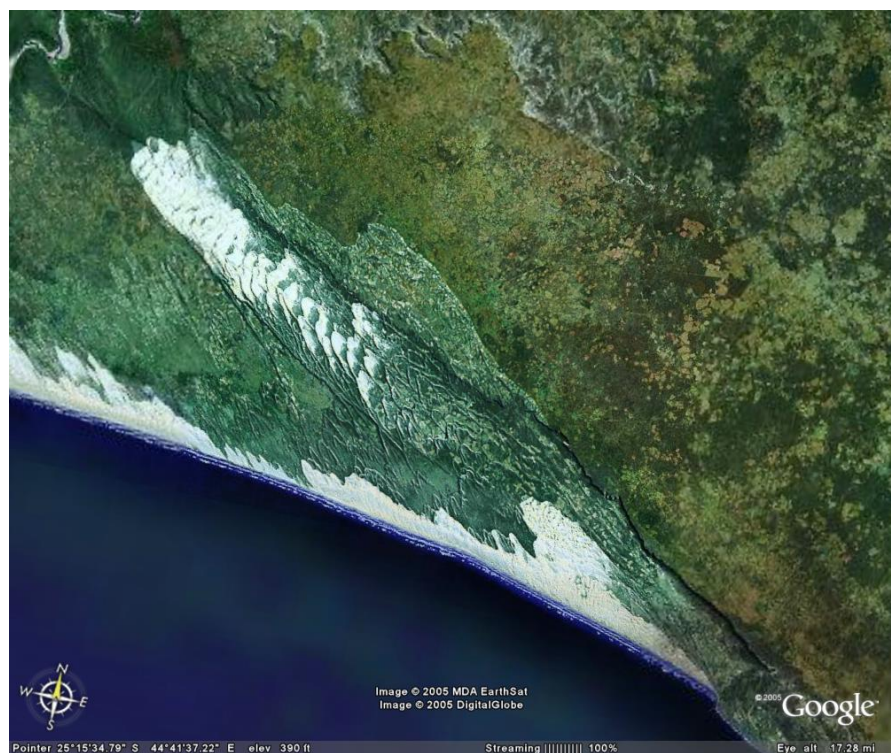


Рисунок А. 3. Исходное изображение шеврона Fenambosy

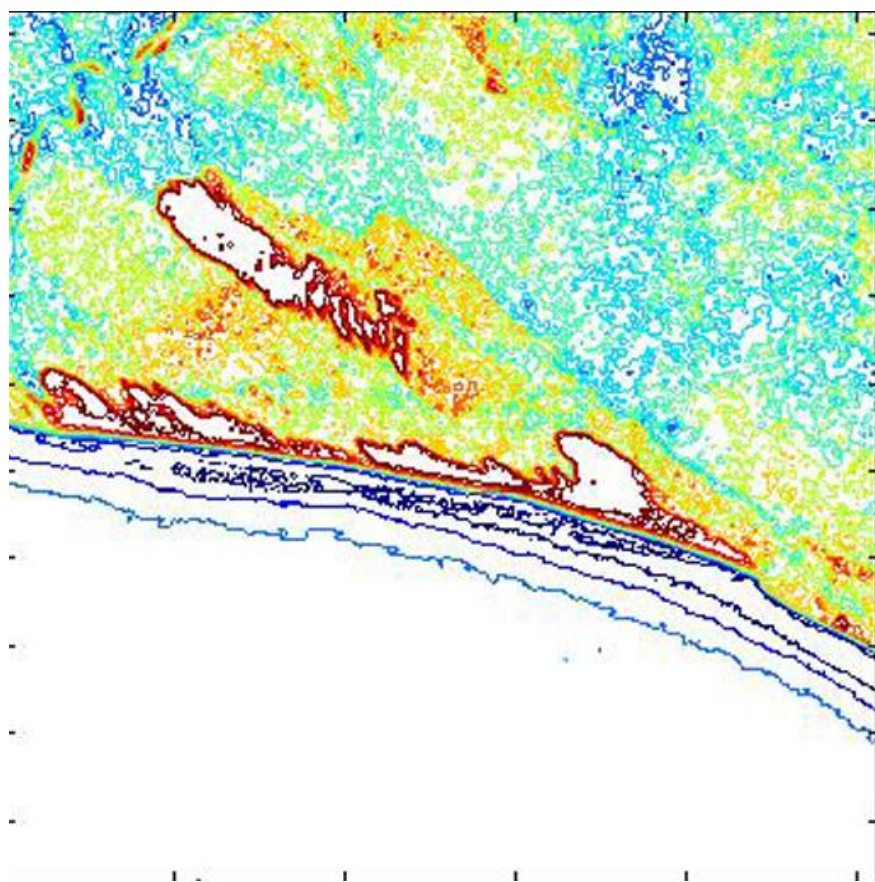


Рисунок А. 4. Обработанное изображение (contour (C, 10))



Рисунок А. 5. Исходное изображение побережья района о. Суматры (до цунами)

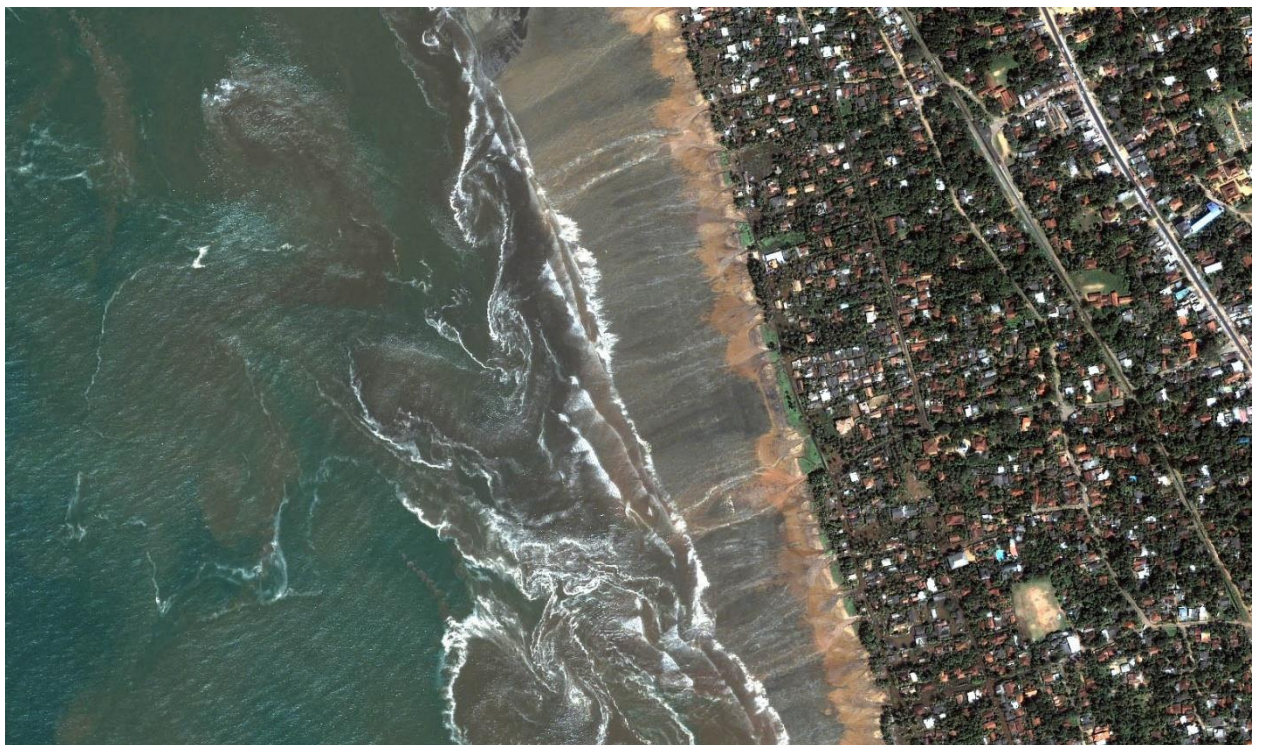


Рисунок А. 6. Исходное изображение побережья района о. Суматры (после цунами)

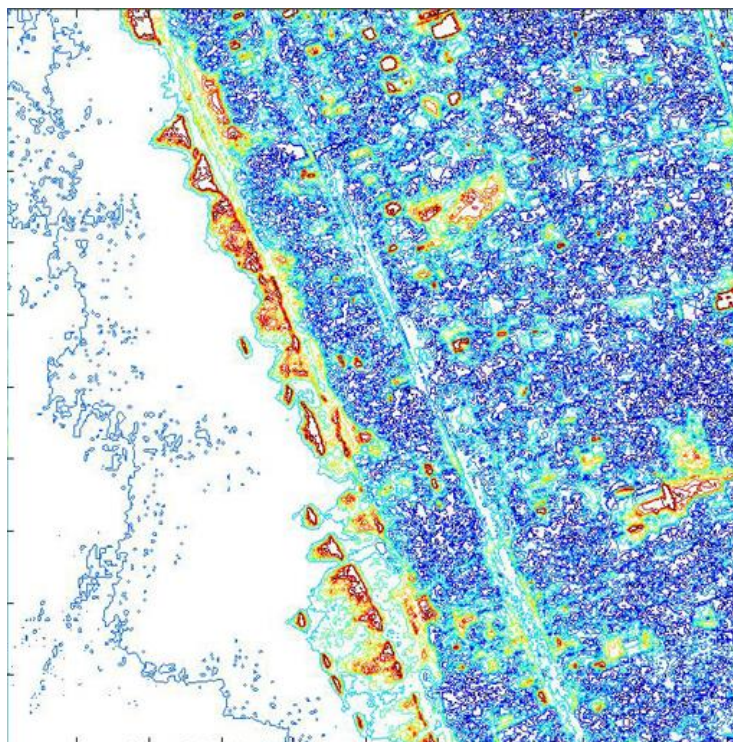


Рисунок А. 7. Обработанное изображение побережья района о. Суматры
(до цунами), (contour (C, 10))

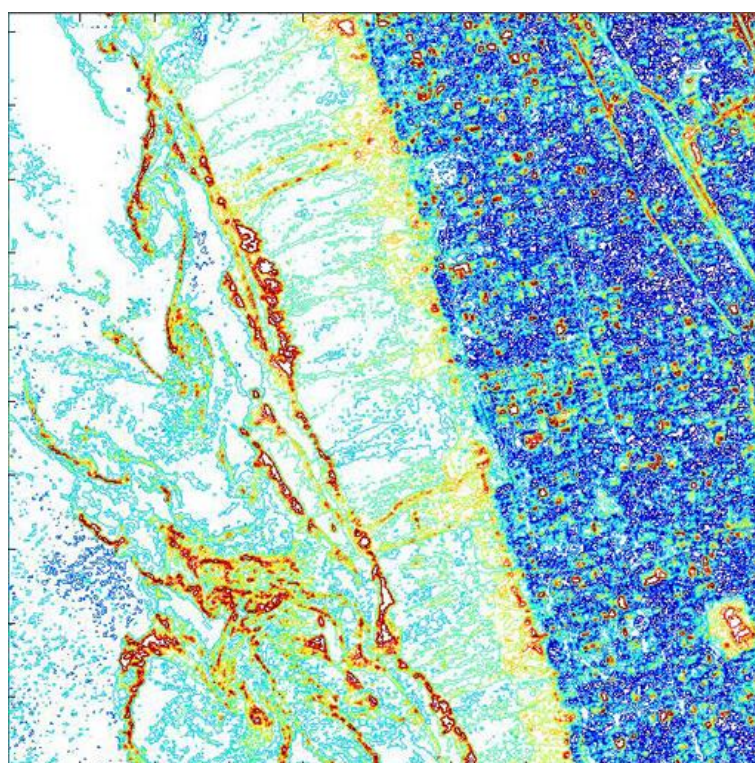


Рисунок А. 8. Обработанное изображение побережья района о. Суматры
(после цунами), (contour (C, 10))



Рисунок А. 9. Исходное изображение побережья Японии (до цунами)



Рисунок А. 10. Исходное изображение побережья Японии (после цунами)

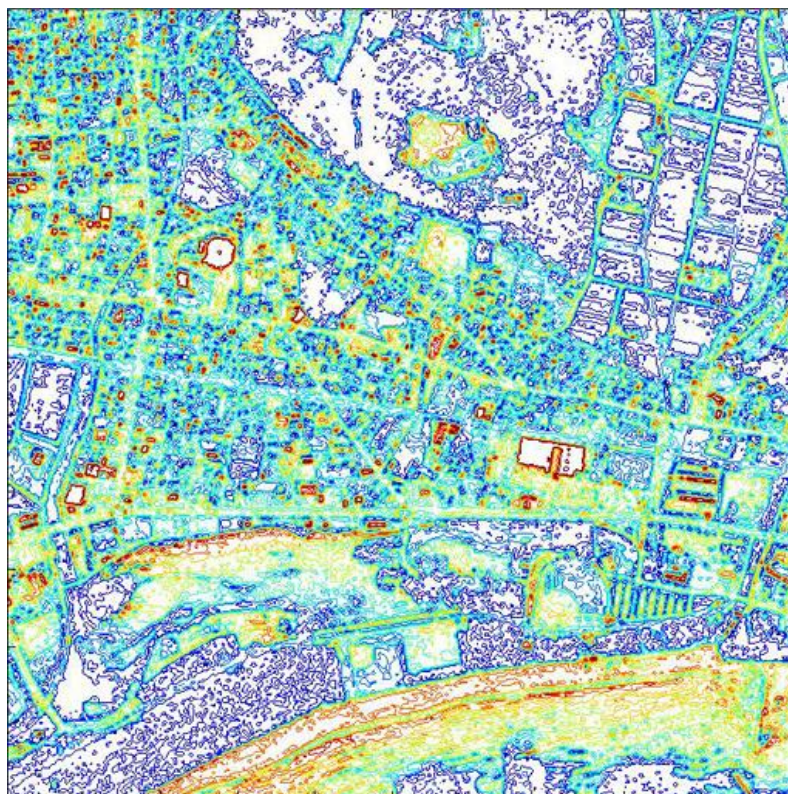


Рисунок А. 11. Обработанное изображение побережья Японии (до цунами),
(contour (C, 10))



Рисунок А. 12. Обработанное изображение побережья Японии (после цунами),
(contour (C, 10))



Рисунок А. 13. Исходное изображение курильского побережья
(верхнее изображение: до цунами; нижнее – после цунами)

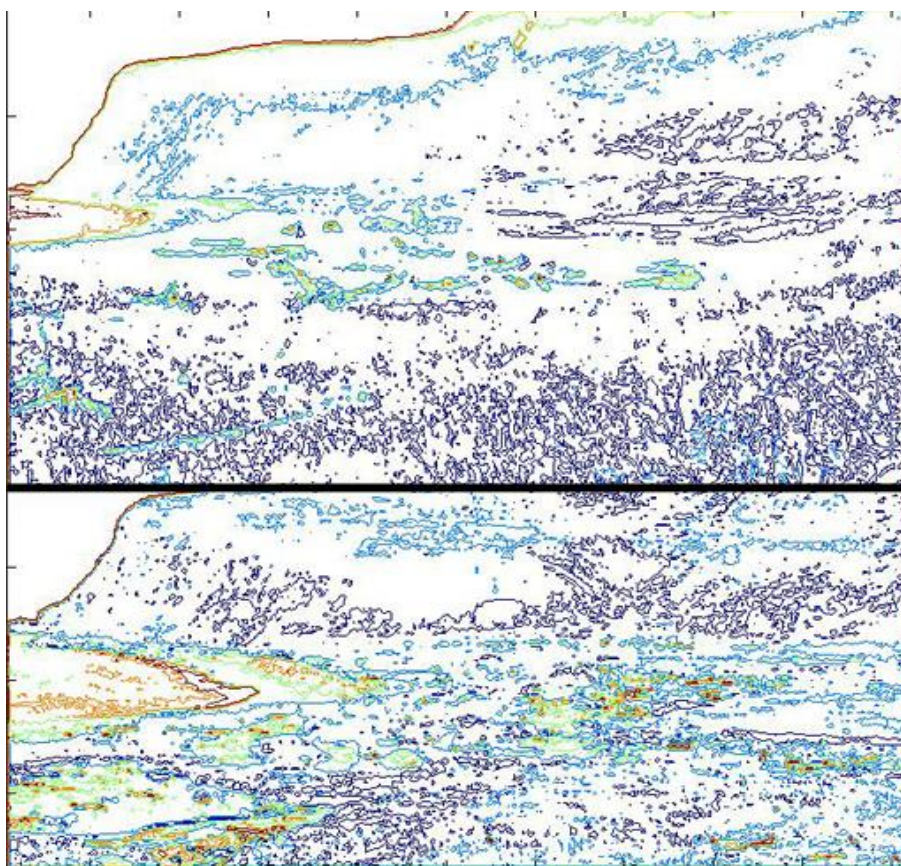


Рисунок А. 14. Обработанное изображение курильского побережья
(верхнее изображение: до цунами; нижнее – после цунами), (contour (C, 10))



Рисунок А. 16. Исходное изображение чилийского побережья
(катастрофическое цунами 1960 г.)

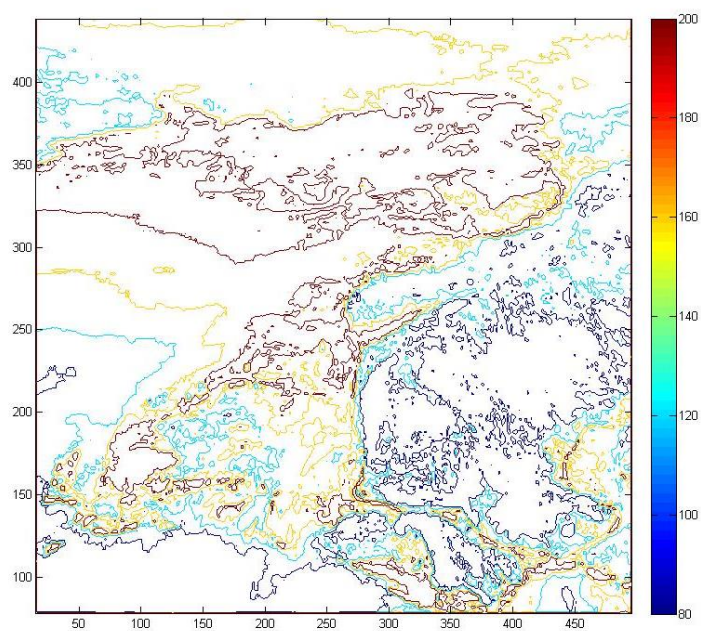


Рисунок А. 17. Обработанное изображение чилийского побережья

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Обработка изображений при помощи алгоритма ShearLab (шумоподавление)

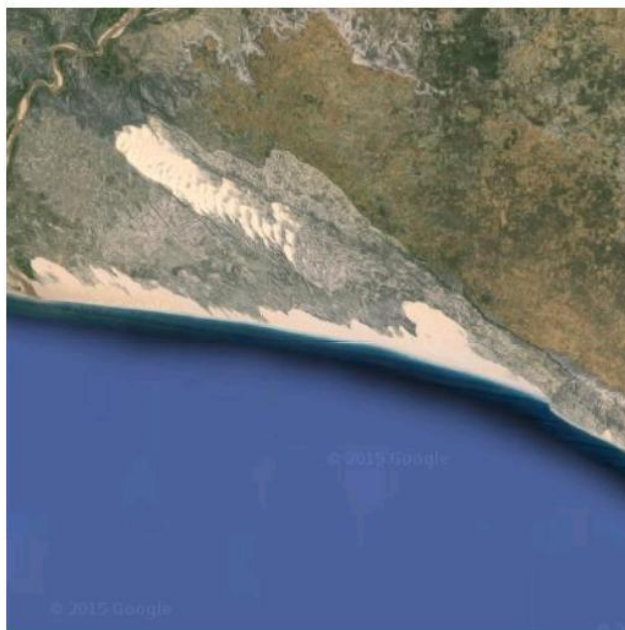


Рисунок Б.1. Исходное изображение шеврона Fenambosy

PSNR = 18.595

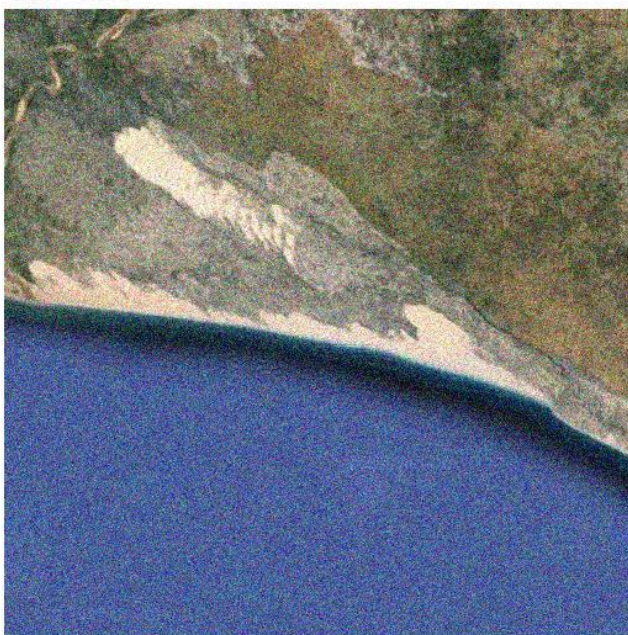


Рисунок Б.2. Зашумление (Гауссовский шум)

PSNR = 28.6646



Рисунок Б.3. Восстановление

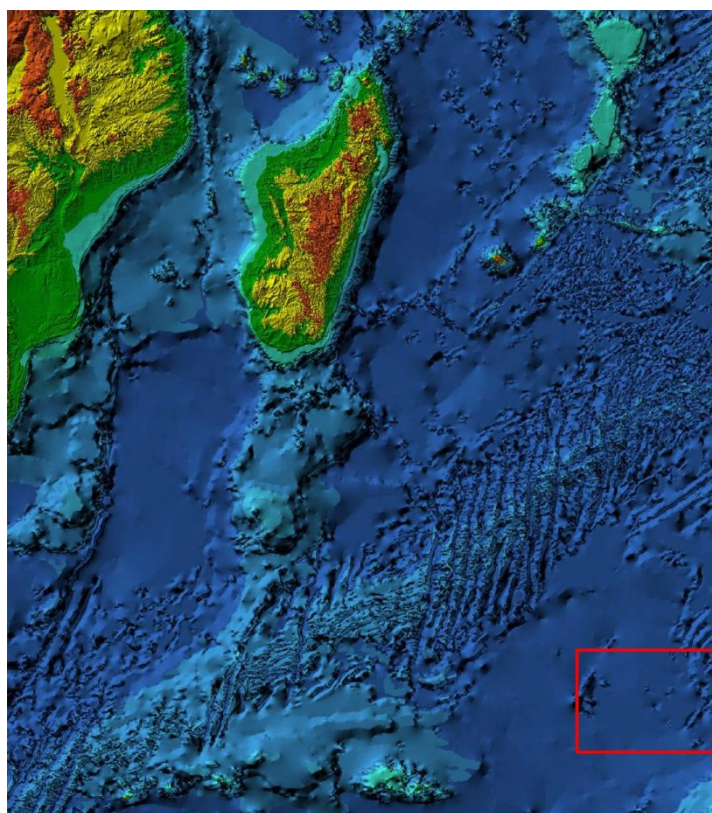


Рисунок Б.4. Исходное изображение кратера Бюркли

PSNR = 18.5776

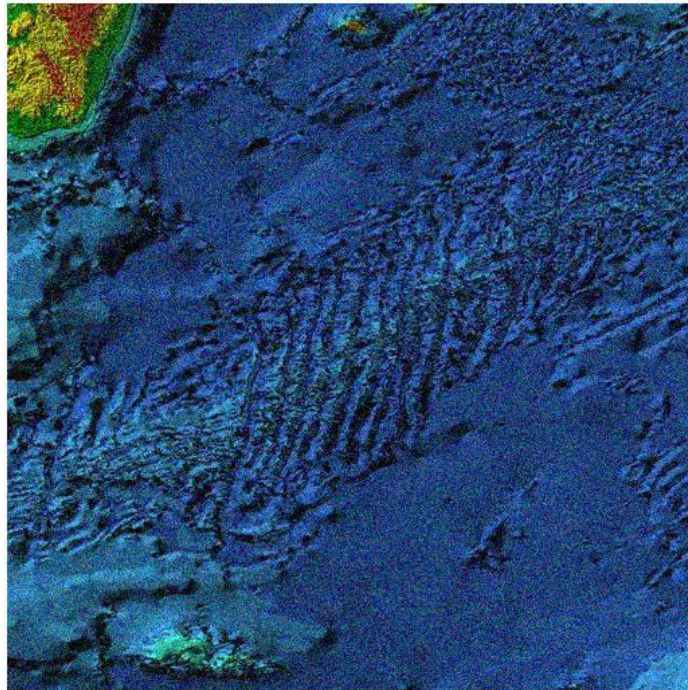


Рисунок Б.5. Зашумление (Гауссовский шум)

PSNR = 24.7229

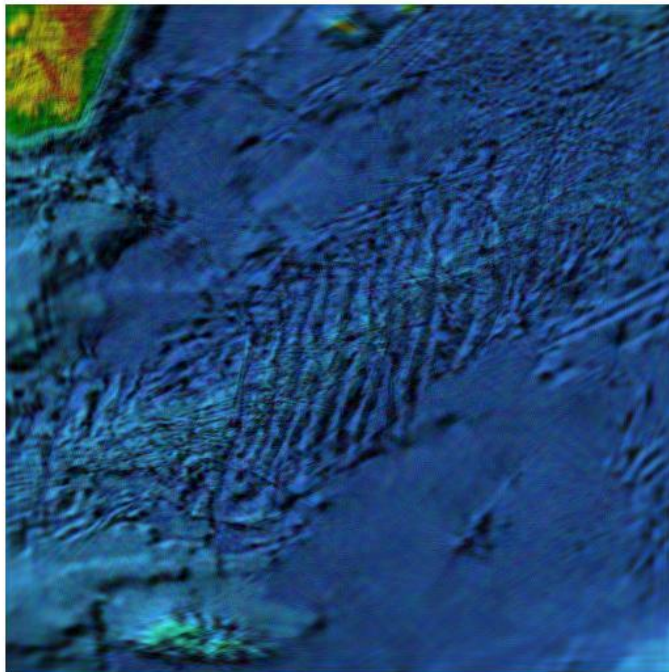


Рисунок Б.6. Восстановление

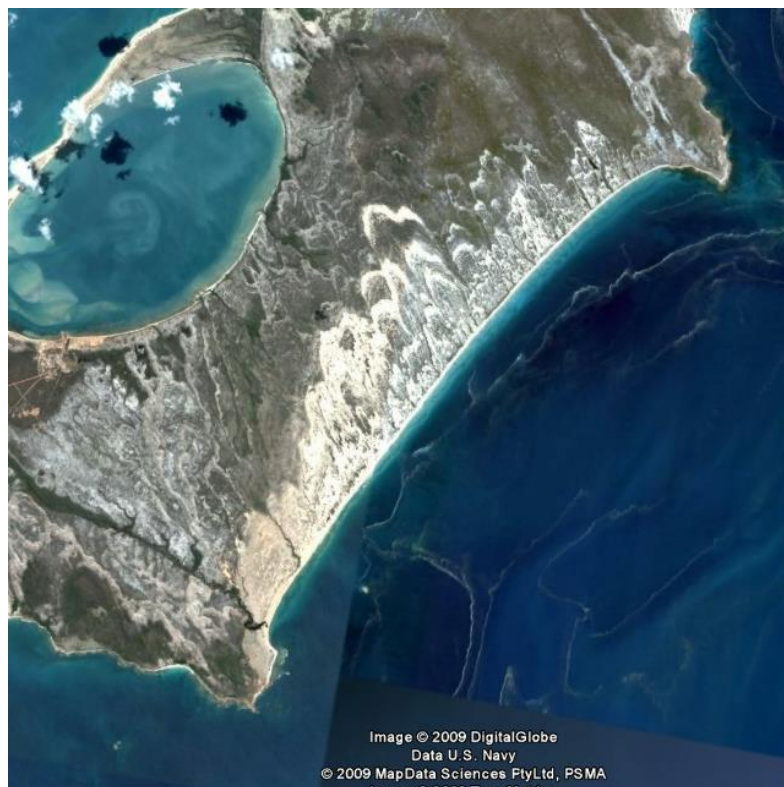


Рисунок Б.7. Исходное изображение шеврона в заливе Карпентария

PSNR = 18.5776



Рисунок Б.8. Зашумление (Гауссовский шум)

PSNR = 25.8417



Рисунок Б.9. Восстановление

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Обработка изображений при помощи алгоритма Shearlet_Toolbox (фильтрация)

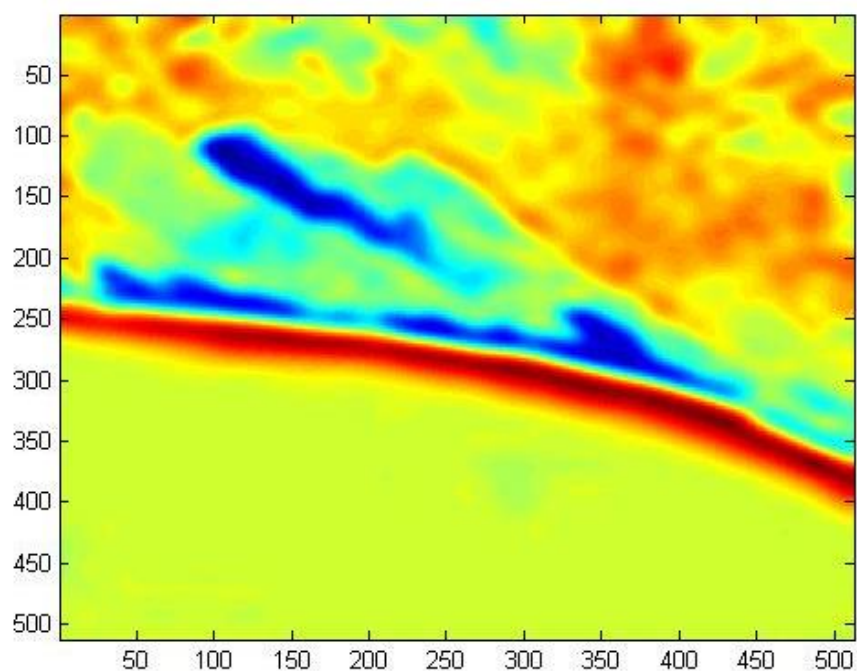


Рисунок В.1. Исходное изображение шеврона Fenamboyu



Рисунок В.2. Оригинальное изображение в градациях серого

(размер 512x512 пикселей)

NOISY IMAGE, MSE = 0

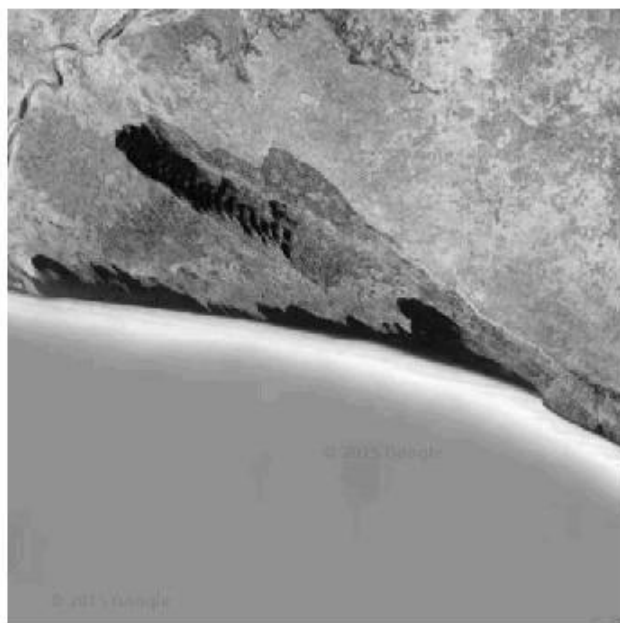


Рисунок В.3. Зашумление

RESTORED IMAGE, MSE = 38.7985

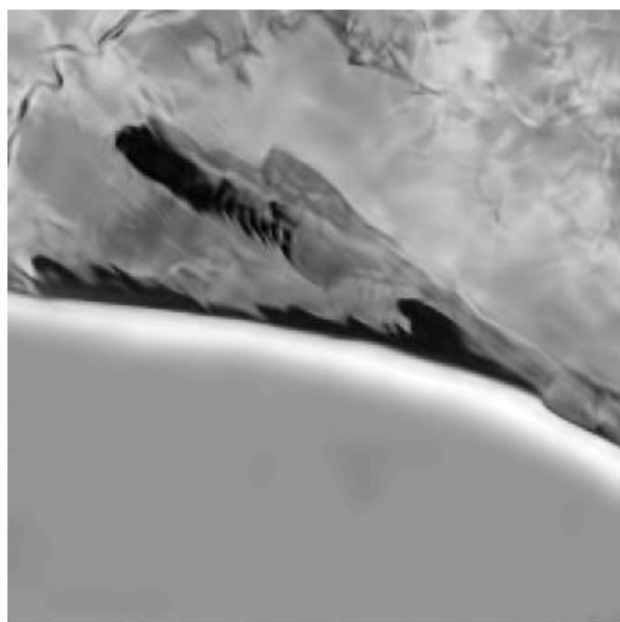


Рисунок В.4. Восстановленное изображение

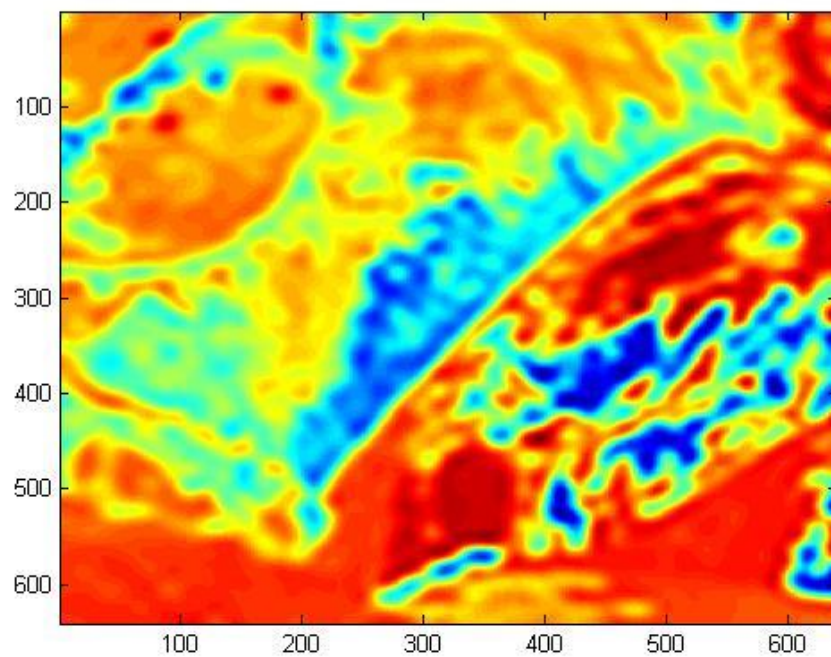


Рисунок В.5. Исходное изображение шеврона на побережье в заливе
Карпентария, северная Австралия

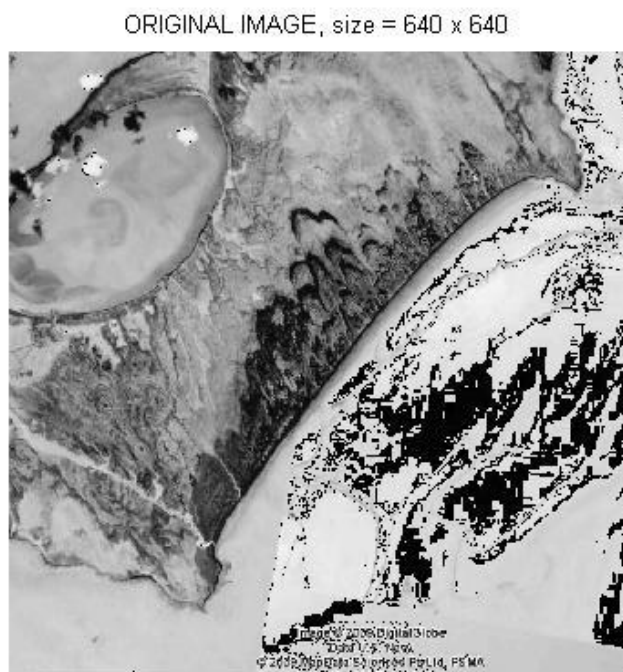


Рисунок В.6. Оригинальное изображение в градациях серого
(размер 512x512 пикселей)

NOISY IMAGE, MSE = 0

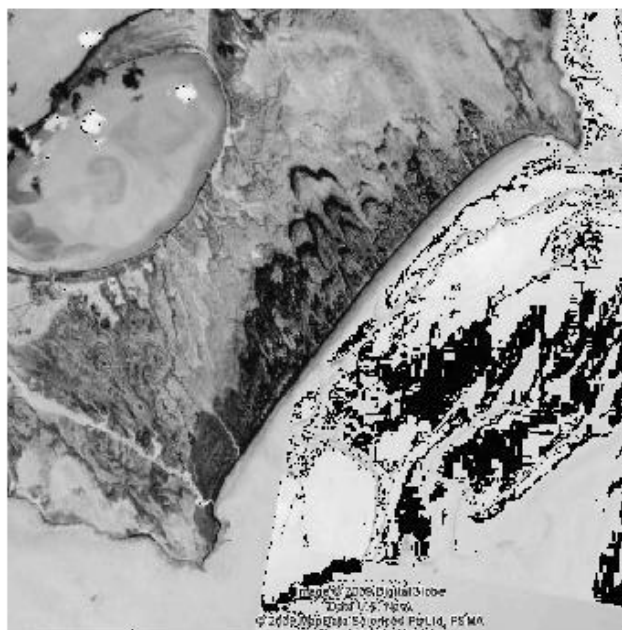


Рисунок В.7. Зашумление

RESTORED IMAGE, MSE = 138.315

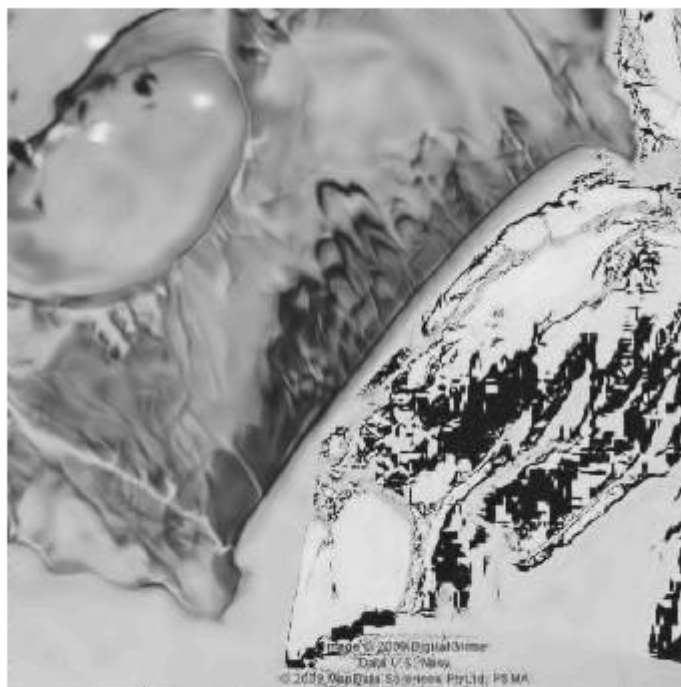


Рисунок В.8. Восстановленное изображение